QUEDATESTP GOVT. COLLEGE, LIBRARY

KOTA (Raj)

Students can retain library books only for two

DUE DTATE	SIGNATURE
	1
	1
)
	1
	1
	1
)
	J
	}
	}
	DUE DTATE

सांख्यिकी के सिद्धान्त और उपयोग

हिन्दी-समिति-ग्रन्थमाला--४५

सांस्थिकी के शिखान्त खोर उपयोग

सेसक श्री विनोदकरण सेठी

प्रकाशन शाखा, सूचना विभाग

प्रथम सस्करण १९६१

मूल्य ९ रुपये

मुद्रक

प॰ पृथ्वीनाय भागेंव, भागेंव भूषण श्रेस, गायघाट, दाराणसी

प्रकाशकीय

सास्यिकी अपेक्षाकृत एक आधुनिक शास्त्र है जिसका महत्त्व ज्ञान-विज्ञान की उत्तति एव आधिक और औद्योगिक समस्याओं की जुटिलताओं के साथ बढ़ना जा रहा है। उसके उपयोग का क्षेत्र आज इतना व्यापक हो गया है वि' विज्ञान की शायद ही ऐसी मोई शाखा हो जिसमें सारियको ने नियमी और उसने आधार पर प्राप्त तथ्यो का प्रयोग न किया जाता हो । इस समय देश में खाद्योत्पादन तथा अन्य वस्तुओं के निर्माण सम्बन्धी जो योजनाएँ बनायी जा रही हैं, उनकी बुनियाद हमारी वर्तमान और भावी आवश्यकताओं तया वस्तुओं की उपलब्धि सम्बन्धी उन आंकड़ा पर ही रखी जा सकती है जो सारियकी के सिद्धान्तों का साववानी से प्रयोग करने पर प्राप्त होते हैं । इसी लरह औद्योगिक, आधिक तथा चिकित्साविज्ञान सम्बन्धी गवेपणाओं में भी सारियकी द्वारा प्राप्त निष्कर्षों से बड़ी सहायता मिलती है। इसकी इन उपयोगिता और बढते हुए महत्त्व को दृष्टि में रतकर ही यह पुस्तक हिन्दी में प्रकाशित की जा रही है।

हिन्दी-समिति-प्रन्यमाला की यह ४५वी पुस्तक है। इसके लेखक श्री विनोद-करण सेठी एम० एस सी॰ आगरा विश्वविद्यालय के इस्टोटचट ऑक सोशल साइसेज में साल्यिकी के सहायक प्राच्यापक है। आपने उदाहरण दे-देकर विषय को समझाने की चेप्टा की है जिससे उसकी दुरुहता बहुत घट गयी है।

अपराजिता प्रसाद सिंह सचिव, हिन्दी समिति

विषय-सूची

भाग एक

परिचय और परिभाषाएँ

		400	1041
शुर्वाय १-सारियको पया है	***		8
११ वैज्ञानिक विधि और सास्यिकी	१, १२ सास्थिक	ने वे	
उपयोग ४।			
अन्याय २—समध्य और उसका विवरण	***	***	₹ \$
२१ समप्टि १३, २२ घर १३, २ रखने की विधि १४, २४ ऑकडो वा रे २५ घर ने परास का विभाजन १९, माप २५, २७ प्रसार के कुछ माप ३१ और कबुदता ३८।	खा चित्रो द्वारा निय २६ केन्द्रीय प्रवृ	त्पण १६, ति के बुछ	
अध्याय ३प्राधिकता	440	***	85
३१ वे स्थितियाँ जिनमें प्रायिकता का ३२ आपेक्षिक बारम्बारता का सीमान परिभाषा ४६, ३४ प्रतिकथी प्रायिकत ५०,३६ पटनाओं का सगम और प्रतिक घटनाएँ ५१,३८ घटनाओं का वियोग होना ५२,३१० आपेक्षिक वारम्बार प्रायिकता के गुण ५४,३१२ बेत का	त मान ४४, ३३ ॥ ४९, ३५ स्वतः छेद५०,३७ परसः ५१,३९ घटनाओ ताके कुछ गुण ५ प्रमेय ६०।	एक अन्य न्त्र घटनाएँ गरअपवर्जी कांगभित	
अध्याय ४प्राधिकता वटन और यादृष्टि	क चर		६५
४१ याद्वच्छिक चर६५,४२ असतत चर के फलन का वटन ६६,४२२ ६८,४२३ द्वि-विमितीय चरके फल	द्धि-विमितीय यादृ	च्छिक चर	

पच्छ संस्पा

20

८९

74

पारवींय वटन ७१, ४३ सतत वटन ७२, ४३१ आयताकार वटन ७६, ४३२ प्रसामान्य वटन ७६, ४४ सबयी प्राधिकता फरून ७७, ४४१ सचयी प्रामिकता परून के गुण ७७, ४५ स्वतन्त्र चर ७९, ४६ प्रायिकता बटन के प्रति समावरन ८१, ४७ याद्विछक चर का प्रत्याशित मान अथवा माध्य ८३, ४८ बाद्विछक चर के युण ८४, ४ ९स्वतन्त्र चरा के गुणन फल का प्रत्याशित मान ८४, ४ १० चरो के योग का प्रत्याशित मान ८५।

भाग दो परिकल्पना की जाँच और कुछ महत्त्वपूर्ण प्राधिकता बटन

भारताल ५ - प्रजोतिसाविक गाउ-प्रति

६१ द्विषय बटत १०२, ६२ द्विषयं बटन ने उपयोग के कुछ उबाहरण १०२, ६३ द्विपद बटन के कुछ नुण १०७, ६४ द्विपद बटन के लिए सारणी १०९, ६५ एक मनोवैज्ञानिक सिद्धान्त की खोच में द्विपद बटन का उपयोग ११२।	the state of the s	***		
१०६, ६६ द्विपद बटन के कुछ गुण १०७, ६४ द्विपद बटन के लिए सारणी १०९, ६५ एक मनीवैज्ञानिक सिद्धान्त की जीच में द्विपद बटन का उपयोग ११२। अध्याय ७—प्यासों बटन ११५ ७१ कुछ परिस्पितियों जिनमें प्वासो बटन का उपयोग होता है ११५, ७ १ हिपद बटन का सीमान्त रूप ११६, ७ ३ वास्तविक घटन का प्वासो बटन द्वारा सिजकटन ११६, ७ ४ प्वासो बटन के कुछ गुण १२१, ७ ५ उवाहरण १२५, ७ ६ व्यासो बटन की सारणी १२६। अध्याय ८—प्रसामान्य बटन १२८ ८ १ गिणतीय बटनों का महत्व १२८, ८ २ प्रसामान्य बटन की परि-मध्य १३०, ८ ३ प्रसामान्य बटन के कुछ महत्त्वपूर्ण गुण १३१, ८ ४ प्रसामान्य बटन हिपद बटन के कुछ महत्त्वपूर्ण गुण १३१, ८ ४ प्रसामान्य बटन दिपद बटन के कुछ महत्त्वपूर्ण गुण १३१, ८ ४ प्रसामान्य बटन दिपद बटन का एक सीमान्त रूप १३४, ८ ५ प्रदियों का बटन १३७, ८ ६ धावस के प्रट—बटन की व्यत्सित १३४, ८ ७	अच्याय ६—द्विमद बटन	***		१०२
अध्याय ७— प्वासों यटन ११५ ७१ कुछ परिस्थितियाँ जिनमें ध्वासों बटन का उपयोग होता है ११५, ७२ हिपद बटन का सीमान्त रूप ११६, ७३ सास्तविक बटन का प्वासों बटन देर , ७४ ध्वासों बटन के कुछ गुण १२१, ७५ व्यासों बटन को सार्णी १२६। अध्याय ८— प्रसामान्य बटन १२८ ८ गणितीय बटनों का महत्व १२८, ८२ प्रमामान्य बटन की परिमाप्त १३०, ८३ प्रसामान्य बटन के कुछ महत्त्वपूष्णें गुण १३१, ८५ प्रसामान्य वटन के पुरु प्रसुद्ध भूष १३६, ८५ प्रसामान्य वटन हिपद बटन का एक सीमान्त रूप १३५, ८५ प्रसामान्य वटन हिपद बटन का एक सीमान्त रूप १३५, ८५ प्रसामान्य वटन हिपद बटन का एक सीमान्त रूप १३५, ८५ प्रसामान्य वटन हिपद बटन का एक सीमान्त रूप १३५, ८५ प्रसिपों का बटन १३७, ८६ धावस के ब्रिट—बटन की व्यस्तित १३९, ८७	१०३, ६३ द्विपद बटन के कुछ गुष् सारणी १०९, ६५ एक_मनोवैज्ञा	ग १०७, ६४ द्विपद वटः	न के लिए	
७१ कुछ परिस्थितियाँ जिनमें प्वासी बटन का उपयोग होता है १९५, ७२ हिपद बटन का सीमान्त रूप १९६, ७३ बास्तविक बटन का प्राप्त प्रिकटन ११९, ७४ प्वासी बटन के कुछ गुण १२१, ७५ प्वासी बटन की सारणी १२६। अप्पाप्त ८—प्रसामान्य बटन २२८ ८ गणितीय बटनो का महत्व १२८, ८२ प्रसामान्य बटन की परिमाप्त १३०, ८३ प्रसामान्य बटन के कुछ महत्त्वपूर्ण गुण १३१, ८४ प्रसामान्य बटन की प्रस्त १३८, ८५ प्रसामान्य बटन की प्रस्त १३८, ८५ प्रसामान्य वटन की पर्व १३८, ८५ प्रसामान्य बटन की पर्व १३८, ८५ प्रसामान्य बटन की पर्व १३८, ८५ प्रसामान्य बटन की पर्व १३४, ८५ प्रसामान्य बटन हिपद बटन का एक सीमान्त रूप १३४, ८५ प्रसामान्य वटन हिपद बटन का एक सीमान्त रूप १३४, ८५ प्रसामान्य वटन हिपद बटन का एक सीमान्त रूप १३४, ८५ प्रसामान्य वटन हिपद बटन का एक सीमान्त रूप १३४, ८५ प्रसामान्य वटन हिपद बटन की एक सीमान्त रूप १३४, ८५ प्रसामान्य वटन हिपद बटन की एक सीमान्त रूप १३४, ८५ प्रसामान्य वटन हिपद बटन की एक सीमान्त रूप १३४, ८५ प्रसामान्य वटन स्वर बटन की एक सीमान्त रूप १३४, ८५ प्रसामान्य वटन स्वर की स्वर वटन की एक सीमान्य स्वर १३४, ८५ प्रसाम स्वर वटन १३४, ८५ प्रसाम स्वर्थ सीमान्य वटन स्वर विपास सीमान्य सीमान्	वदन का उपयाग हुरूरा			
११५, ७ २ हिपद बटन का सीमान्त रूप ११६, ७ ३ बास्तविक बटन का प्राप्ती पटन द्वारा स्विकटन ११९, ७४ प्वासी बटन के कुछ गुण १२१, ७ ५ व्यासो बटन की सारणी १२६ । अप्पाप ८—प्रसामान्य बटन	अध्याय ७प्वासों वटन	***	***	११५
८ १ गणितीय बटनो का महत्व १२८, ८ २ प्रक्षामान्य वटन की परि- भारा १३०, ८३ प्रक्षामान्य वटन वे कुठ महत्त्वपूर्ण गुण १३१, ८ ४ प्रसामान्य वटन द्विपद वटन का एकसीमान्त रूप १३४, ८ ५ त्रुटियों का वटन १३७, ८ ६ गाठस के त्रुटि-वटन की व्यूसित १३९, ८ ७	११५, ७२ हिपद वटन का सीमान का प्लासी घटन द्वारा सर्जिकटन	त रूप ११६,७३ वास्त ११९,७४ प्दासी वटन	विक घटन न के कुछ	
	८१ गणितीय वटनो का महत्व १२ भाषा १३०, ८३ प्रसामान्य वर ८४ प्रसामान्य वटन द्विपद वटन का का वटन १३७, ८६ ग्राउस के श्र	डन के कुठ महत्त्वपूर्ण सु एकसीमान्त रूप १३४, ८ [टिन्वटन की व्युत्पत्ति १३	ग १३१, ५ त्रुटियो १९, ८७	१२८

•••

पुष्ठ सस्या ... १५०

९ रे याद्विज्ञक चर के फलक का बटन १५०, ९२ х² वा बटन १५०, ९३ х² ,-चरकी परिवाषा १५१, ९४ х² वटन ने कुछ गुण १५२, ९५ समिट को पूर्णह्म से बिनिदिस्ट करनेवाली परिकल्पनाओं के लिए रूथ्यरीक्षण १५४, ९६ रथ्वटनों की सारणी १५६, ९७ उदाहरण १५७, ९८ सासजन सीज्ञव वा रूथ्यरीक्षण १६०, ९९ सामिट को अपूर्ण रूप से बिनिदिस्ट करनेवाली परिकल्पनाओं के लिए र्यंप्यरीक्षण १६०, ९१० मानिट की लिए र्यंपरीक्षण १६०, ९१० मानिट की लिए र्यंपरीक्षण १६०, ९१० मानिट की लिए रोक्सियरी का रूथ्यरीक्षण १६२, ९११ प्रसामान्य-बटन के प्रसास सक्षी परिकल्पना-परीक्षण में रथ्यदान का उपयोग १६९।

अध्याय १०-1-वटन

१० १ उपयोग १७२, १०२ १-वटन वा प्रसामान्य-वटन और ४²-वटन से सबय १७२, १०३ परिवरणना परीक्षण १७३, १०४ उदाहरण १७४, १०५ एक तरका और दो तरका परीक्षण १७६, १०५ दि प्रतिदयं परीक्षण १७८, १०७ उदाहरण १८०, १०८ १-परीक्षण पर प्रतिवध १८०.

अध्याय ११—F-वटन

858

... १७२

१११ F-बटन और x^2 -बटन का सबध १८४, ११२ परिकल्पना परीक्षण १८५, ११३ उदाहरण १८५।

अध्याय १२--परिकल्पना की जाँच के साधारण सिद्धान्त

१८७

१२ १ जाँच की परिचित विधि की आलोचना १८७, १२ २ अस्वीकृति क्षेत्र १८७, १२ ३ एक तरफा परीक्षण १८८, १२ ४ विभिन्न निकयो से अलग-अलग निक्वपं निकालने की समावना १८८, १२ ५ नीमन-पीयरस्त सिद्धान्त १९०, १२ ५ १ पहली प्रकार की नृटि १९१, १२ ५ ३ इसरी प्रकार की नृटि १९१, १२ ५ ३ सिद्धान्त १९४, १३ ५ १ १२ १ परिनाय १९६, १२ ६ १ परिनाय १९६, १२ ६ १ परिनाय १९१, १२ ६ उदाहरण १९१, १२ ६ अभिनत और अनभानत

परीक्षणो की परिमापा १९२, १२७ प्राप्त वा अवकास १९२, १२८ निराक्त्रणोय परिक-पना १९३, १२९ प्रतिदक्ष और प्रतिदक्ष-परिमाण १९३, १२१० स्वीइति और अस्वीइति का १९४, १२११ प्रयम प्रवार की वृद्धि की प्राप्तिकता और वामर्थ्य १९४, १२११ प्रयम प्रवार कतम परीक्षण १९४, १२१३ प्रमेष १९४, १२१ प्राह्म परीक्षण १९६ १२१५ अस्वीइति वृद्धा के चुताव के अत्य निक्य १९७, १२१६ उदाहरण १९७, १२१७ कुछ परि-भ्राप्त १९८, १२१८ उदाहरण २००, १२१९ नीवन-पीयरक्षन के सिद्धात्तों की आलोबना २०१, १२२० किसर वी विचारधारा २०२।

भाग तीन

साहवर्व समाध्यण और सहस्रवध

२०९ २११

949

अध्याय १३---साहचर्य

१३ १ परिचय २११, १३ २ साहबर्य की परिभाषा २१२, १३ ३ साहबर्य में माप २१३, १३ ४ कॉमक साहबर्य का सूचकान २१७, १३ ५ कीमक साहबर्य के सूचकाक का बखन २१७।

अध्याम १४—सह-सबध

328

१४ १ परिचय २२१, १४ २ सह-सवस सारणी २२१, १४ ३ धनारमक व ऋणारमक मह सवय २२२, १४ ४ प्रकीण विन २२३, १४ ५ समान्नयण वक २२३ १४ ६ सह-सवस गुणाक २२४, १४ ७ समा-श्रयण गुणाको जीर सह मवय गुणाक में सवय २२६, १४ ८ सह-सवध गुणाक का परिकलन २२७, १४ ९ वहुत वह प्रतिवस्त्रं के लिए सह-सदम गुणाक का परिकलन २२८, १४ ९ १ परिकलन की जोव २२८, १४ १० सर्व बंदू व मानक का परिवर्तन २२९।

अध्याय १५---वक-आसजन

235

१५ १ अनुमान में त्रुटि २३२, १५ २ अनुमान के लिए प्रतिरूप का उपयोग २३४, १५ ३ अवकल कलन के कुछ सूत्र २३४, १५४ एक-

पष्ठ सत्या

घात प्रतिरूप वा बामजन २३५, १५५ अधिक सरछ प्रतिरूप २३८, १५६ प्रावनको के प्रसरण २३९, १५७ परिनल्पना परीक्षण २४१, १५८ द्विषाती परवळम वा बामजन २४२।

अध्याय १६ — प्रतिवधी घंटन, सहसंवधानुषात और माध्य वर्ग आसंग ... २४ १६ १ असतत चर २४५, १६ २ सतन चर २४६, १६ ३ ममाश्रयण २४८, १६.४ सहस्वचयानुषात २४९, १६ ५ माध्य वर्ग आसग २५०।

भाग चार

प्रावकलन

२५३ २५५

अध्याय १७—प्राक्तलन के आर्राभक सिद्धान्त १७ १ प्राक्तलक और उनके कुछ इच्छित गुण २५५, १७ २ दो जन-भिनत प्राक्तलको का सबना २५५; १७ ३ प्रावस्त्लक प्राप्त करने की कुछ विधियों २६०; १७ ४ विश्वस्य अतराल २६५।

भाग पाँच प्रयोग अभिकल्पना

२६९ २७१

अध्याय १८—संवरीक्षण में सारियकी का स्थान ...

१८१ भीतिकी और रसायन के प्रयोग में साहियकी वा साधारण-सा

महत्त्व २७१, १८२ विज्ञान की अन्य शास्त्राओं में साहियकी का असा
धारण महत्त्व २७१, १८३ परिकल्पना की जाँव और प्रावणी के

प्रावक्तन में प्रयोग अभिकल्पना का महत्त्व २७२, १८४ उदाहरण

२७३; १८५ याद्विच्छकीकरण २७४, १८६ नियनित याद्विच्छकी
करण २७६, १८० ठलांक २७७, १८८ प्रयोग कारम्भ करने से पूर्व

योजना की आवस्यकता २७७, १८८ प्रयोग की योजना बनाते सम्य

तीन वातों का च्यान रखना होता है २७८, १८१० प्रयोग का उद्देश्य

२७८; १८११ प्रयोगिक उपनार २७९, १८१५ अयोग अभि
कल्पना का एक सरल उदाहरण २८१, १८१५ निराकरणीय परि
कल्पना को सिद्ध नहीं किया जा सकता २८३, १८१६ भीतिक

अध

पृथ्ड	संस्थ
स्थितियो पर नियत्रण की आवश्यकता २८३, १८.१७ प्रयोग को अधिक मुग्राही बनाने के कुछ तरीके २८३।	
प्रध्याय १९—प्रसरण-विश्लेषण	32
१९ १ एक प्रयोग २८६, १९ २ प्रसंप्गो का संयोज्यता गुण २८६, १९ २ औसत सम्बाई का प्रावकलन २८७, १९४ औसत सम्बाई के प्रावकलक का प्रसरण हा प्रावकलन २८६, १९५ प्रसरण का प्रावकलन २८६, १९५ १ ८० वे का प्रावकलन २८६, १९५ १ असरण विवलेगण का पिरकल्पन की जीच में उपयोग २९२, १९८ प्रसरण विवलेगण सारणी २६३, १९९ कुछ कल्पनाएँ जिनके आचार पर निराकरणीम परि	10
करनना की जाँच की जा सकती है २९४, १९ १० म्पिरीक्षण २९५। अध्याप २०	२९
पुन प्रयोग २९८,२० ३ याद्चिक्वजीक्त ब्लाक अभिकल्पना और पूर्णत याद्दिक्वजिक्त अभिकल्पना में अन्तर २९८, २० ४ वे उपादान जिन पर पैदानार निर्मार करती है ३००,२० ५ याद्चिक्वजिक्त क्लाक अभिकल्पना के लिए एक गणितीय प्रतिक्त ३००,२० ६ विना परिकल्पना के अन्तर्गत त- का प्राक्कलन ३०१,२० ७ विना परिकल्पना के अन्तर्गत त- १०८ प्रसाफ विश्लेष्य सारणी ३०३,२० ४ प्रतिकल्पना को अन्तर्गत ता विश्लेष्य सारणी ३०३,२० ४ प्रतिकल्पना को अन्तर्गत विश्लेष्य सारणी ३०३,२० ४ प्रिकल्पना को अन्तर्गत विश्लेष्य सारणी १०३,२० ४ प्रतिकल्पना को अने वा विश्लेष्य सारणी ४०३,२० ४० प्रतिकल्पना को अने वा विश्लेष्य सारणी ४०३,२० ४ प्रतिकल्पना को अने वा विश्लेष्य सारणी ४०३,२० ४ प्रतिकल्पना को अने वा विश्लेष्य सारणी ४०५,२० ४० प्रतिकल्पना को अने वा विश्लेष्य सारणी ४००,००० स्ति वा विश्लेष्य सारणी ४००,००० स्ति वा विश्लेष्य सारणी ४००,००० स्ति वा वा वा विश्लेष्य सारणी ४००,००० स्ति वा	
२०११ ब्लॉक ३०९।	
अध्याय २१—लंदिन वर्ग अभिकल्पमा	₹ १
२११ प्रयोगको सुप्राही बनानेका प्रयस्त ३१०,२१२ उदाहरण ३१०,२१३ ऑक्डे ३१२,२१४ लैटिन वर्ग ३१२, २१५ विक्लेपण ३१३, २१६ साधारण ३१६।	

अध्याय २२-—बहु-उपादानीय प्रयोग २२ १ परिचय ३१७, २२ र बहु-उपादानीय प्रयोग के लाम ३१८, २२ ३ मुख्य प्रमाव और परस्पर किया ३१९, २२ ४ उदाहरण ३२२; २२५ विश्लेषण ३२३ ।

पुष्ठ सस्या ... ३२८

अध्याय २३--समाक्रुलन

२३ १ असपूर्णं ब्लॉन अभिनत्यना की आवश्यवता ३२८, २३ २ परस्पर किया ना समानुरुन ३२९, २३ ३ विदरेपण ३३०, २३ ४ आसिन

किया का समानुरन ३२९, २३३ विस्रपण ३३०, २३४ व समानुरुन ३३५, २३५ साल्यिकीय विस्रपण ३३६।

सप्पाय २४—सत्तित असपूर्णं स्लॉक अभिकल्पना .. ३३८

दर्भ परिभाग ३३८, २४२ जराहरण ३३८, २४३ सगुन्ति असमून स्टोक अभिनत्यना वे प्राचलों ने नुष्ठ सबय ३४०, २४४ साबृच्छिकीमरण ३४१, २४५ खोती से मयधित एव सगुन्ति असमून स्टोक लिए प्रति-समुगं स्टांच लिए क्यान्य १४, २४५ विरत्येण ने लिए प्रति-रामिक प्रतिक्त विस्ति प्रतिक समुगं स्टांच लिए प्रति-रामिक प्रतिक प्रत

अध्याप २५ — सहकारी चर का जपयोग और सह-प्रसरण विश्लेषण ... १४७ २५ १ प्रयोग को अधिक दक्ष बनाने का प्रवत्न ३४७, २५ २ समाध्यण प्रतिरूप ३४७, २५ ३ जपवारों के प्रभाव समान होने की परिकटनना के अन्तर्गत समाध्यण प्रतिरूप के प्रावको का प्रावकन ३४८, २५ ४ बिना परिकटपना के समाध्यण प्रतिरूप के प्रावको का प्रावकन ३४९, २५ ५ जपवार वर्ग-द्रोग ३५१, २५ ६ परिकटपनाओं के

परीक्षण ३५४, २५७ उदाहरण ३५४, २५७१ प्रेक्षण ३५५। भाग छः.

प्रतिदर्श सर्वेक्षण

अध्याप २६—प्रतिश्ती सर्वेक्षण के साधारण सिद्धालत ... २६१ योजना ने लिए सर्वेदाण की आवश्यकता ३६१, २६२ सर्वेक्षण में मुद्रियों ३६२, २६३ अब्य व्यादान ३६३, २६४ सरक यार्डिडिक प्रतिचयन ३६४, २६५ प्राक्कलन ३६५, २६६ प्राक्कलन का प्राया ३६६, २६७ प्राक्कलन के प्रसरण का प्रावकलन का ५६७, २६८ व्यनुपात का प्रावकलन ३६८, २६९ विचरण-गुणाक और प्रतिवश्च परिमाण ३६९।

	पृष्ठ	सल्या
अध्याय २७स्तरित प्रतिचयन	441	3 00 €
२७ १ परिचय ३७१, २७ २ प्राक्तलन ३७१, २७ ३ प्राक्तल	न का	
प्रसरण ३७२, २७४ प्रसरण का प्राक्कलन ३७२, २७५ वि	भिन	
स्तरो में प्रतिदर्भ परिमाण का वितरण ३७३, २७५१ समानु		
वितरण ३७३, २७५२ अनुकूलतम वितरण ३७४, २७६ स		
विधि ३७४, २७७ सनिकटन ३७६।		
अध्याय २८ द्वि-चरणी प्रसिचयन	***	३७७
२८ १ प्रतिचयन विधि और व्यय ३७७, २८ २ द्वि-चरणी प्रति	चयन	
विधि ३७७, २८ ३ सकेत ३७८, २८ ४ प्रतिचयन ३७८, २८ ५ प्र		
लन ३७८, २८ ६ प्रावकलक प्रसरण ३७९, २८ ७ प्रसरण का प्राव	<u>কল</u> দ	
३८०, २८८ अनुकूलतम वितरण ३८१, २८९ उदाहरण ३	ረቅ 1	
अध्याय २९सामृहिक अतिवयन	***	३८५
२९ १ साम्हिक प्रतिचयन ३८५, २९ २ अनुपाती प्राक्कलन ३८५,	२९३	
व्यवस्थित प्रतिचयन ३८६, २९ ४ प्रारोहक समुह ३८७, २९ ५सा		
प्रतिचयन में प्रसरण ३८८, २९ ६ प्रसरण का प्राक्कलक ३८८,	२९ ७	
सामूहिक और सरल बादिष्छक प्रतिचयन की तुलना ३८८।		
अध्याय ६०अनुपाती प्रावकलम	***	390
३०१ अनुपात का प्रानकलन ३९०, ३०२ अनुपाती प्रार	ক্লক	
अभिनति ३९०, ३०३ अभिनति का प्राक्कलन ३९२ ,	8 0 €	
अनुपाती प्राक्कलक की माध्य-वर्ग-त्रुटि ३९२, ३०५ समध्टि-य	ध का	
अनुपाती प्रानकलन ३९२, ३०६ अनुपाती प्रानकलन और स	ाभारण	
अनिभनत प्राक्तलन की तुलना ३९३, ३०७ उदाहरण ३९४,	300	:
प्रतिदर्गं परिमाण ३९४।		
अध्याय ३१—विभिन्न-प्राधिकता प्रचयन 🔐	***	\$94
३११ चयन विधि ३९६, ३१ २ विकल्प विधि ३६८, ३१ ३ प्रा		
३९९, ३१४ प्राक्करक का प्रसरण ३९९, ३१५ मापा		
प्रायिकता ४००, ३१६ प्रात्कलक के प्रसरण का प्रावकलन '	goo,	
३१७ उदाहरण ४०१,।		
क्रोरिकाविक बाद्यावली		Yet

चित्र-सूची

t	चेत्र संस्था	पृष्ठ सस्या
	१समयी बारवारता	१ ৩
	२आवृत्ति बहुभुज	१७
	३आयत चित्र	१८
	४उत्तर प्रदेश ने पुरुषों की आयु-आवृत्ति वा आयत वित्र	२०
	५उत्तर प्रदेश में प्रतिशत साक्षरता	२२
	६— उत्तर प्रदेश में साक्षरता का आयत चित्र	22
	७-फरीदाबाद ने परिवारी का मासिक व्यय ने अनुसार वितर	π-
	कायत चित्र	२३
	८-फरीदाबाद ने परिवारी का मासिक व्यय ने अनुसार सचर्य	ì
	आवृत्ति चित्र	२४
	९—भारतीय ग्राम परिवारो का अधिकृत क्षेत्रफल के अनुसार वित	रण
	—सचयी आवृत्ति चित्र ना एक भाग	२५
	१०-असममित तथा समसित वितरण	٧0
	११—ऊर्घ्यं रेखा पर निद्याना बाँधकर चलायी हुई गोलिया का वितरण	४५
	१२—चौकी पर वर्षा बिन्दुओ की प्रायिकता	86
	१३—पासा फॅबने पर ऊपर की बिंदुओ की सख्या का प्रायिकता वटन	६७
	१४—एक पाँसे के छ मुख	ĘC
	१५-चित १४ में दिय हुए पाँसे की फेंकने से प्राप्त द्वि विमितीय	घर
	का वटन	६९
	१६—चित १४ में दिये हुए पाँसे को फेंकने से प्राप्त ऊपर के मुख	भी
	सख्याओं ने योग (x+y) का प्राधिकता वटन	/9 a
	१७—चित्र १५ में दिय हुए प्रायिकता वटन का निर्देशाक्षी पर वि	
	X और Y का एक-पाश्वीय वटन	৬ १
	१८—एक सतत वटन का आवृत्तिफलन— $\gamma = f(x) = rac{1}{\sqrt{2\pi}} rac{e^{-rac{1}{2}}}{2\pi}$	χ ² (94
	१९—आयताकार वटन में $P\left[\mathbf{a}' < \mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}\right]$	७६

चित्र संस्था		पृष्ठ सत्या
२०—आयताकार वटन का सचित प्राधिकता फलन		96
२१-दो स्वतन्त्र यादच्छिक चरो के समुक्त और एव	-पारवींच वटन	۷٥
२२एक पाँसे के छ मुख		6
२३-चित्र २२ में दिये पॉसे को फेंकने से प्राप्त ऊ	पर की संख्याओं व	FF
सर्युक्त वटन		65
2X-		65
२५—N (μ—ο) কা ঘলবে-फल		१३३
२६ — द्विपद (१, 🖟) का दड चित्र		8 2 8
२७—द्विपद (२, ६) का दड चित्र		830
२८—दिपद (४, 🖫) का दड चित्र		१३६
२९—विपद (८ 🖁) का दड चित्र		5 5 5
३०विपद (१६ दें) का दड चिन		(2 4
₹		१९६
३२—∜≕० के एक परीक्षण का सामव्य वक		१९८
ै रै—े रे५ में से २० बार भफलता के लिए pकासग	गविता फलन	२०७
३४—सारणी सन्या 141 के लिए प्रकीण वित्र		२२२
रे५—सारणी 14 2 के लिए प्रकीण चित्र और सरल	समाध्यण रेखा	२३७
कुछ ग्रीक ग्रक्षरों के उर	चारण	
α एल्फा	Β, β वीटा	
ि γ गामा	े डल्टा	
एन्साइलन	∳ फाई	
% का ई	λ लैमदा	
μ म्यॄ	१ स्यू	
क पाई	₽री	
ণ আঁ	ψ साई	
m ईटा	<i>ई</i> जाई	
0 बीटा	🎗 🕹 ओमेगा	
∑ σ सिगमा		

कुछ गणितीय संकेत

(x) ■ एक सख्या है जिसना मान निम्नलिखिन अनत श्रेणी से प्राप्त होना है।

$$c = t + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{1!} + \cdots$$

$$= t + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{1!} + \cdots$$

(2) π (पाई) एक वृत्त की परिधि और व्यासका अनुपात । इसका मान लग-भग 3 14159 होता है।

(3)
$$\Gamma(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

गामा फलनो का निम्नलिधित महत्व-पूर्ण गुण होता है Г(n+1)⇒n Г(n)

- (4) a=b a लगभग b के वरावर है।
 - 5) 'क' > 'स' 'ख' से 'क' बडा है।
- (6) 'क' < 'ख' 'ख' से 'क' छोटा है।
- (7) n'n वस्तुओं के कुछ कमवयों की सख्या।
 - (8) (n) n वस्नुओ में r वस्नुओ के विभिन्न सचयों की

सस्या =
$$\frac{N^{\dagger}}{r^{\dagger}(N-r)^{\dagger}}$$

(9) AUB 'A सगम B' A या B में से कम से कम एक घटना का घटित होना

,== तक A1 घटनाओं का समम अर्थात् इन n घटनाओं में से

कम से कम एक का घटित होना।

- (11) A-B 'A वियोग B' A घटित हो, परन्तु B नहीं।
- (12) ANB 'A प्रतिन्छेद B' A और B दोनो का एक साथ घटना ।
- (13) C⊂A 'घटना C घटना A में थॉमत है' अर्थीन् यदि C घटित होगी तो A भी घटित होगी।
- (24) C4A 'घटना C घटना A में शॉभत नहीं है' शानी यदि C घटित हो। तो यह आवश्यक नहीं है कि A भी घटिन हो।
- (15) v(A) न्यू ए 'घटना A की वारबारता'।
 (16) P(A) 'घटना A की प्राधिकता'।
- (17) P(X=a) X के a के बराबर होने की प्राधिकता ।
- (18) $P(a < X \le b) X$ का मान a से अधिक और b के वरावर अधवा b से कम होने की आधिकता।
- (19) g¹(a,b) X के उन मानो का कुलक जिनके लिए a<g(X) ≤ b</p>
- (20) 6 € ω 'बोटा स्थित है ओमेगा में' अर्थात् कुलक w के मानी में से 6 एक है।
- (21) P(A/B) 'प्राविकता A दत्त B' यह दिया होने पर कि B घटित हो चुकी है A की प्रतिवयी प्राविकता।
- (23) F(x) 'चर X का x पर सचयी प्रायिकता फलन ⇒P[X ≤x]
- (24) (a,b) उन संख्याओं का कुलक जो 2 से बड़ी और b से छोटी है।
- (25) (a,b) उन सख्याओं का कुलक जो a के बराबर या a से बडी है बीर b से छोटो है।
- (26) (a,b) उन संस्थाओं का कुरुक जो a से वडी है और b के बराबर अथवा b से छोटी है।
- (27) (a,b) उन मस्याओं का कुलक जो न तो 2 से छोटी है और न ही b से बडी।

भाग १ परिचय और परिभाषाएँ



अध्याय १

सांख्यिकी क्या है?

११ वैज्ञानिक विधि और सास्थिकी

"अमुक बाड का भी बहुत धुद्ध व उत्तम होता है।"
"अमुक देश के लोग बहुत असम्म और निदंगी होते हैं।"
"विषय की ९० प्रतिशत जनसस्या युद्ध के विरुद्ध है।"
"स्ट्रैस्टोमाइमीन से क्षमरोग में कुछ भी काम नहीं होता।"

इस प्रकार के अनेको वक्तव्य आपने आपने जीवन में भुने होंगे। यदि आप इनका विश्लेषण करें तो आपको कई आद्यायंजनक वातो का पता लगेगा। जिन सज्जनों ने उन्त बाह के भी की बहुत प्रशासा की थी उन्होंने समयत उस बाह के कैवल एक ही दिन का उपयोग किया है, जो बहुत उत्तम था।

उन्तर विधिष्ट देश के छोगों से जिनको जिनायत है वे उस देश के दो चार व्यक्तियों को छोड़कर विधिक्त छोगों के सम्पर्क में नहीं आये हैं। जिनको विद्यत्त की जनता का मत जानने का दाना है वे सम्पर्क में नहीं आये हैं। जिनको विद्यत्त की जनता का मत जानने का दाना है वे केवल प्रकार है। दो माह के दीप्रिया में किये परिअभण के परचात्त उन्होंने विद्यत्त की जनता की मानिक स्थिति की विद्यत्त्वना करते हुए एक पुस्तक जिली है। उनसे प्रकार करने पर आपको जात होगा कि इस अमण में सी-डेड सी से अधिक व्यक्तियों से वार्ताञ्य करने और उनका मत जानने का उन्हें अनवस्त मही मिला। इंट्रेटोमाइसीन पर जिस महिला की विद्यत्त्व नहीं है उत्पक्त थेटा इसका इजेदबन कपने पर भी क्षपरोग से छुटकारा नहीं पा करा था। ये वस्तव्य इस व्यक्तियों ने अपने अनुभव के आधार पर ही दिय ये। परन्तु इन अनुभवों के विद्यत्त्व इस प्रकार कुछ योड से विजिद्ध अनुभवों के आधार पर इतने व्यापक वस्तव्य देश उचित नहीं है। पर पर्वेद जाप स्वय अपने द्वारा दिये गये किसी व्यापक वस्तव्य मा विद्वेष्टण करें तो आपको आपको व्यक्तियां होता दिये गये किसी व्यापक वस्तव्य मा विद्वेष्टण करें तो आपको आपको सूर्ण विस्ता है है। पर प्रवेद काम स्वय अपने द्वारा दिये गये किसी आपको विस्तर्क विद्वार विद्

है। क्या यह सम्भव नहीं है कि ऊपर जिन बनतव्यों की विवेचना की गयी है वे सब सहीं हा—या उनमें से कुछ महीं हो? मान लीजिए वि जिस महिला ने स्ट्रेंप्टो-माइसीन की आलोबना की थी उन्होंने उन हवारा सबरोगियों ना अध्ययन विधा होता की आलोबना की थी उन्होंने उन हवारा सबरोगियों ना अध्ययन विधा होता कि नकों स्ट्रेंप्टोमाइसीन दी गयी जीर उनमें से कोई भी रोम से सुट्टामाइसीन दी गयी जीर उनमें से अपिया मानते? लेनिन यह अभूबत मो तो विधाय ही है। उन्होंने उन सब रोगियों का तो अध्ययन नहीं किया जिनकों यह औपपि दी गयी है। किर भी उनके कथन में आपका विस्तास अवस्म ही जिमक वह होता।

यह शायद मनुष्य का स्वभाव है कि अपने अनुभवों के आधार पर चहु उन वहुत-मी वस्तुओं और पटमाओं के बारे में भी एक धारणा बना देता है जिनका उसे कुछ भी अनुभव नहीं होता । बास्तव से विवास का पितास हमी प्रकार होता है। जब कोई बैगानिक कियी सिद्धान्त अववा नियम का प्रतिपादन करता है तो उनका आधार भी उपने या अव्य बैगानिकों के अनुभव ही होते हैं। "कोह के दुकट को पानी में जाकने में पति में उपने या अव्य बैगानिकों के अनुभव ही होते हैं। "कोह के दुकट को पानी में जाकने में उसने अवस्था अव्य अव्य बैगानिकों के अनुभव ही होते होते हैं।" में स्वित्या बुनार एगोफिलीस नामक मन्छर के काटने से ही होता है।" में सब कम प्रकार के कथन है जिल्हें वैवानिक सत्य की सजा दो जाती है। क्या इनके प्रतिपादन का अर्थ यह है कि बैग्नामिकों ने प्रत्येक रोता को प्रकार होता है। क्या का अर्थ यह है कि बैग्नामिकों ने प्रत्येक रोती को मन्छर हारा को पानी में दाककर देखा है या उन्होंने मलेरिया वे प्रत्येक रोती को मन्छर हारा को पानी में दाककर देखा है या उन्होंने मलेरिया वे प्रतिवेक रोती को मन्छर हारा काट जाती हुए देखा है ? इस प्रकार कियों भी वैग्नामिक नियम की विवेचना मेरि आप करे तो आपको पता चलेगा कि उनका आधार कुछ सीमित अनुभव ही है।

इस मकार विधिष्ट से ज्यापक नियमी के प्रतिपादन में दोनों ही सम्भावनाएँ हैं। वे सत्य भी हो सकते हैं और असत्य भी। वंशानिक इस बास्तविकता को समझता है। यह यह सावा नहीं करता कि में नियम निरपेक्ष सत्य ही है। यह यह जानता है। वह यह पात्रकरणा (hypothesis) मान है जो बोनानिक ज्यात् के अभी तक के अनुभवों को सामादने में सहायक होने हैं। यदि इन परिकल्तनाओं के विख् कुछ भी प्रमाण विज्वे हैं तो यह इन नियमों में सहोयन करने के लिए अयवा उन्हें त्याग कर इपरे नियम प्रतिकारित करने के लिए अयवा

व्यापक ज्ञान प्राप्त करने की एक निषि है जिसे वैज्ञानिक विधि कहा जाता है।

इसमें निम्न वरण होते है-

(१) प्रयम, वस्तुओ, कार्यों और घटनाओं का प्रेक्षण तथा अध्ययन किया जाता है।

(२) द्वितीय, इन प्रेक्षणो में पारस्परिक सम्बन्ध स्थापित करने और उन्हें

समझने के लिए कुछ मिद्धान्तों का प्रतिपादन किया जाता है।

(३) तृतीय, इन नियमो में से कुछ नियमन निवाले जाते हैं जो प्रेक्षणगम्य सर्वजो तया घटनाओं से सम्बन्धित होते हैं।

(४) चतुर्यं, इन घटमाओं या वस्तुओं के निरीक्षण ने लिए कुछ प्रयोगी ना

आयोजन किया जाता है।

(५) पचम, यदि इन प्रयोगों के निष्कर्ष प्रतिपादित नियमों के विरुद्ध होते हैं तो इन नियमों को त्याग कर अथवा उनमें सुधार कर नवीन नियम प्रतिपादित किये जाते हैं।

इम प्रकार निरीक्षण और प्रयोग विज्ञान के अभिग्नतम अग है।

क्सि साधारण मनुष्य और वैज्ञानिक में यही अन्तर है वि पहला अपने क्यनों की पुष्टि के लिए और अधिक निरोक्षण की आवश्यकता नहीं समझता, जब कि दूसरा परीक्षण को अव्यवस्त आवश्यक ही नहीं समझता बिक्क परीक्षण और निरोक्षण के बाद में कियन के अक्षय होने की सभावना से परिचत है। दार्क्षानक तत्त्व-विद्या (meta-physics) का तर्क विज्ञान में प्रयोग होनोंकों तक से एक्दम विपरीत होता है। उसमें यदि अनुमच किसी नियम का खण्डन करते पाये जाते हैं तो इसे अस्त स्वात हैं। इसे स्वस्त स्वात हैं। इसे स्वस्त स्वात हैं। इसे स्वस्त स्वस्ता जाता है, न कि नियमों का।

इस प्रकार वैज्ञानिक विधि से जो जान प्राप्त किया जाता है नहीं विज्ञान है। इसमें दो प्रकार के नियम होने हैं। एक तो वे जो यथार्थ है जिनके उदाहरण पहले विचे जा चुके हैं। "सीडियम के टुकर की पानी में डाकने से उसमें आग लग जाती है" यह नियम सीडियम के प्रयंक टुकर के पानी में डाकने से उसमें आग लग जाती है" यह नियम सीडियम के प्रयंक टुकर पर हर समय लामू होता है। इसी फार त्या पर कहा जाता है कि "एनाफिकीट मच्छर के काटने से ही मलेरिया होता है" तो इस कथन का तालपर्य यह होता है कि विमो मी मनुष्य को बिना इस मच्छर के काटे हुए मलेरिया नहीं हो सकता। इस प्रकार के सब नियम, जिनमें कोई अपवाद कि होता, यदार्थ नियम (exactlaws) नहलति है। भीतिकी और रमासन-विज्ञान कि हम पो सी सीटियम पाने जाते हैं। कभी-कभी प्राप्तिक छले और इन नियमों में इंड अन्तर पामा जाता है, परन्तु यह अन्वर अधिवतर सूक्त होता है—इतन महिस कि इसको प्रयोग सम्बन्धी जुटि (experimental error) गाना जा सकता है।

इसके विषयीत कई परिस्थितियों में एक ही प्रकार की स्थिति और एक से कारणों के रहते हुए भी बलग अलग अनेको फल सम्भव हो सकते हैं। हो सकता है कि ऐसे कुछ अञ्चात कारण हो जो इन फलो को निश्चित करते हैं। लेकिन इन कारणों के ज्ञान के अभाव में निसी यथार्थ नियम को प्रतिपादित करना असम्भव है। जैसे यह कहना असम्भव है कि किसी स्त्री की आगामी सन्तान लडकी होगी या लडका. अथवा स्ट्रैप्टोमाइसीन से कोई विद्येष मरीज नीरोग हो जायगा या नहीं; या किसी निर्दिष्ट ताप, नमी व हवा के रुख और वेग के होने पर वर्षा होगी या नहीं । ऐसी अवस्या में किसी निरिष्ट वस्त् अयवा घटना के बारे में भविष्य बाणी करने में दोनो हो सम्भावनाएँ है। ये भविष्य कवन सत्य भी हो सबते है और असत्य भी। लेकिन ऐसी परिस्थितियां में भी वैज्ञानिक विलक्त विवश नहीं ही जाता । वह यथार्थ में भिन्न एक दूसरे प्रकार के नियम का प्रतिपादन कर सकता है। ये नियम अकेली वस्तुओ अपना घटनाओ के नारे में नहीं होते बल्कि अनेक एक-सी वस्तुओ अयवा घटनाओं के ममुदायों के बारे में होते हैं । ये नियम यह बताते हैं कि इस समुदाय में प्रयोग के फलस्वरूप जो भिन्न भिन्न फल प्राप्त होगे उनकी बारम्बारता (frequency) कितनी होगी। उदाहरण के लिए "१०० बच्ची में से ५१ लडकियाँ होती है और ४९ छडके" अथवा "८० प्रतिशत क्षयरोगियो को स्टैप्टोमाइसीन से लाग होता है।"

ऐसे नियमो को साक्ष्यिकीय नियम (statistical laws) कहा जाता है।

इस प्रकार साक्ष्यिकी में निम्नलिखित बातें सम्मिलित है।

१-- घटनाओं या वस्तुओं के गुणों का सामुदायिक रूप में प्रेक्षण करना।

२--इन प्रेक्षणो का विस्लेषण करके सक्षिप्त रूप में उनका वर्णन करना ।

३—इस वर्णन के आधार पर बारम्बारता अववा प्रायिकता (probability) के रूप में नियमी का प्रतिपादन करना ।

क रूप म नियमा का प्रतिपादन करता । ४--कुछ दूसरी प्रेक्षणगम्य (observable) घटनाओ की प्राधिकता सम्बन्धी

मिष्कर्षे निकालना ।

५—इन निष्कर्षों की बाँच करने के लिए बुछ प्रयोगो का आयोजन करना। ६—इन प्रयोगों के फलो का विष्लेषण करना।

६ १ २ सास्यिकी के उपयोग

दे परिस्थितियाँ जिनमें सास्यिकीय रीति का उपयोग होता है इतनी स्यापक है कि विज्ञान की ऐसी शासा फवाचित् ही कोई हो जिसमें इस रीति का उपयोग कभी न किया जाता हो। भौतिक तया रासायनिक विज्ञानों में भी, जिन्हें बहुत समय तक पूर्णत ययायं समझा जाता था, यई नियम प्रायिक्ताओं के रूप में है। विरोधत इंक्ड्रेड्रान, प्रोटान और न्यूड्रान आदि सूदम क्लिजओं के अध्ययन में तो गांधिकों में ति स्वित्त के इंक्ड्रेड्रान, प्रोटान और न्यूड्रान आदि सूदम क्लिजओं के अध्ययन में तो गांधिकों है। ते तियम वहें पिछों के सावन्य में होते हैं वे यथार्थता के इतने निकट होते हैं कि नियम और फुओं के अन्तर को प्रायोगिक भूक समा कर उनकी जरेका की जा नवती है। अन कई बैजानिक यह बात मानने लगे हैं कि वैताभिक नियम कभी भी पूर्ण रूप से यथार्थ नहीं होने बहिक यथार्थ के सामित्रदन-मात्र होते हैं। ये मानते हैं कि समी नियमों की प्रकृति अतिम विज्ञ्यण में माब्यिकीय ही होती है।

आरम्भ में विज्ञाना में साहियको का उपयोग अधिकतर प्रयोग के समुदाय को इस प्रकार व्यक्त करने में होना था कि उससे प्रवृत्तियों (tendences) प्रत्यक्ष हो जायें। किर कुछ विज्ञाना में व्यक्तिया और इकाइयो को छोडकर इनके समूह के आचरण के अध्ययन पर जोर दिया जाने छगा। इसके लिए मास्यिकीय रीतियों बहुत उपस्कत तथा जान्यस्म थी।

कृपि व प्राणि-विज्ञान के अध्ययन में बैजानिकों को कारम्भ में बहुत क्षिप्रक कठिनाई का सामना बरना पड़ा था। निन्ही दो पीया पर एक ही प्रमार को बाद व पानी का एक-मा असर नहीं पड़ता। यहां बात पत्तुओं में भी पायी गयी। ऐसी दशा में एक ही उपाय था। बहु यह कि ड्यानित-विरोप को छोड़कर उनके समुदायों के निपय में नियमों की कोज की जाय। इस दुग्टिकोंच से विचरेपण की अधिक उसत विभिया की जायस्थकता पूरी करने में साख्यिकीय सरीका का प्रयोग हुआ। नयी गयी परिस्थितियों का सामना करने के छिए नये गये सिदान्त बनाये गये। इस प्रकार मास्थिकी के जिकास में कुथि एक प्राणि-विज्ञान वर बहुत बड़ा भाग है।

इन विज्ञाना में केवल यही आवश्यकता नहीं थी कि प्रयोगों के फलों की ठीक से विवेचना की जाय। इस व्याख्या को सरफ बीर प्रयोगों को अधिक सफल बनाने के लिए प्रयोगों के आयोजन में भी उन्नति नी आवश्यकरा थी। किसान यह चाहता है कि अनान के उत्पादन में शत्य उत्ति नी आवश्यकरा थी। किसान यह चाहता है कि अनान के उत्पादन का रतर जंना बना रहे। उसकी सहायदा के लिए इपि-विज्ञान वैराजों को प्रयोग करने होते हैं जिनसे यह मालूम हो जाय कि अनान की किम त्यावत की लिए इपि-विज्ञान किसाने किसाने कि अनान की निक्त किसाने की अपने किसान किसाने कि अने किसान किसाने की जाती है कि इन प्रयोगों के आधार पर वह विस्तानों को लाबदायक सुखाब दे सवैगा।

विभिन्न सादों की तुलना के लिए पहले-पहल जो प्रयोग किये गये ये उनमें यह काफी समझा गया था कि दादों ना प्रिन्न-भिन्न मू-सेनों में प्रयोग दिया जाम और उनके उत्सादन की तुलना करके उनके आपेदिनों मू-स्याना हम कामान कर कामान लगा किया जाये। परन्तु धीन्न ही अनुमान लगा किया जाये। परन्तु धीन्न ही अनुमान नगा की यो जा कम गया कि इस दरीने से समुजित मू-स्यानन होना अवस्यव है। एक ही विस्स में पीभों की उपज में, जिन्हें निम्न-भिन्न भू अंबों में बोकर एक ही प्रकार की मिट्टी, खाद व पानी का उपयोग किया गया हो, बहुण अन्तर हो सकता है। इसलिए जब खादों की तुलना की जाय तो इस बात का पता काना आवश्यक हो जाता है कि जो अतर उत्पावन में पाया जाता है उसका सबय खादों से ही है अवका उन अनेव कारणों से जिनसे या दो वैज्ञानिक अनीमत है या जिन पर जनवा कुछ बया नहीं है। इसके लिए सादिक्कीय तक का प्रयोग किया गया है और वैज्ञानिक अनीपण में उसका महत्व प्रमाणित हो चुका है।

कृपि-विज्ञान से ही सर्वाधित बनस्पति-प्रजनन (plant breeding) विज्ञान है। बनस्पति-सबर्धक किसी भी गुवेपणा का अतिम ध्येय होता है बनस्पति की विधिक उन्नत किस्मों का विकास । किसी भी किस्म की उन्नति कई विभिन्न दृष्टि-काणों से हो सकती है। उदाहरणार्थ वनस्पतियों को जो खाद दी जाती है वे उसका उपयोग करने के योग्य वनें, बीमारी के कीटाणुओं से वे अधिक सुरक्षित हो या तापमान के उतार-चडाव की सहन करने की चनकी शक्ति में वृद्धि हो। वनस्पति पर उत्पत्ति-सबधी और वातावरण-सबधी उपादानी (factors) का प्रभाव पहता है। जिस प्रकार किसान अनुकुछ वातावरण द्वारा अधिव उत्पादन प्राप्त करने की चेप्टा करता है, उसी प्रकार बनस्पति-प्रजनन का अध्ययन करनेवाला उत्पत्ति के सिद्धान्तों के उपयोग द्वारा वनस्पतियों के वशानुगत गुणों में उन्नति करने का प्रयत्न करता है। परन्तु इस गवेषणा में उसे नमें नमें प्रश्नों को हल करना पडता है जिसकें लिए वे सिद्धान्त मयेप्ट नहीं होते जिनका उसे पहले से ज्ञान है। नये मिद्धान्तों की खोज के लिए उसे उत्पत्ति सम्बन्धी प्रयोग करने पडते हैं। इस गवेपणा में जितना धन उपलब्ध है और जितना समय है उसको देखते हुए किस प्रकार पौधों का चुनाव करना चाहिए, प्रयोग के लिए उनकी सख्या किस प्रकार निर्धारित करनी चाहिए, भिन्न-भिन्न थेणियो को भिन्न-भिन्न भू-क्षेत्रो में किस नियम के अनुसार लगाना चाहिए आदि समस्याओं का हरू सास्यिकी के सिद्धान्तों के उपयोग से ही होता है।

पिछले दस पन्द्रह वर्षों में विटामिनो के सबध में बहुत अनुसधान हुआ है। भिन्न-भिन्न विटामिनो के महत्त्व को समझने के लिए अनेक प्रयोग किये गये हैं। यह प्रयोग बहुषा पत्रुओं पर किये जाते हैं, क्योंकि उम्र, नजन, लिम, बल और पहले से बनी हुई भोजन को आदतें आदि कई बाते हैं जो भोजन के प्रभाव को विसी सीमा तक निर्पारित करती हैं, इसलिए इन प्रयोगों के लिए पत्रुआ के ऐसे समृहा को चुना जाता है जो अपर लिसी बाता में एक-से अपवा लगभग एक-से हों। एक समृहा को एक एक एक सिटट मात्रा में सामान्य स्ट्राक दो जाती है। इनमें से एक को उपर्युक्त सामान्य स्ट्राक दो जाती है। इनमें से एक को उपर्युक्त सामान्य स्ट्राक दो जाती है। इनमें से एक को उपर्युक्त सामान्य स्ट्राक से कही अधिक लिदानिन मिलता है और इसरे को बहुत वम, लगभग नहीं के बराबर। वाकी समृहों को इन मीमाओं से वर्ष मित्र मित्र मात्रा निर्मात सामान्य स्ट्राक तो है। इसरे से पहले के स्ट्राक्त सामान्य स्ट्राक से स्ट्राक्त है। किया पूर्व को किस समृह में रखा जाये यह अनियमित्रता में निर्मात किया जाता है। अन्वेयक प्रतिदित्त वजन के उतार-कदाव व बीमारियों के किहा के अस्तार सामान्यों ते किया गया हो तो इससे कई मूर्यवान् निटक्य निक्त जो सकते हैं।

सामाजिक विज्ञानों में भी सास्थिकीय विधिया का बहुत उपयोग होता है। जनता का मत जानने में राजनीतिक दठों की रिष्य होना स्वामाविक ही है और हर कारण वे सास्थिकी से अधिक परिचित्त होने जा रहे हैं। अर्थशास्त्र की गवेषणाओं में तो मास्थिकीय विधियों अपरिहार्य हो जाती है। अर्थशास्त्र के नियमों का सबध सामुदाधिक प्रवृत्तियों में होता है और ऐसे नियमों का तिथियों यह प्रवृत्तियों में होता है और ऐसे नियमों का निर्धारण बहुषा सास्थिकीय प्रणालों के विवेक्षण उपयोग पर निर्मर करता है।

पोपण-सम्बन्धी गवेगणा (nutritional research) में एक लक्ष्य यह हो सत्तव है िक भोजन में उन राइने का अधिक से अधिक उपयोग हो जिनकी, मोजन सबारी अध्ययन के अनुसार, औरत आधिक से अधि पारी गयी हो है। इस क्षेत्र में मासियती का प्राप्त मारी प्राप्त है। इस के को मासियती का प्राप्त मारी है। मारियती का साहार वा पता लगाना और उसकी किसी लब्ध से तुकना करता है। मित व्यनित आहार का विदारण किन प्रकार है यह जानना भी उतना हो सहस्वपूर्ण है जितना जीसत का जान। परन्तु एक बड़े देन भे प्रविक मनुष्य से उसके आहार का विवरण प्राप्त करता जसमन सा है। मित समयता मी हो तो इस ऑकडों को जोडकर उनसे आदित का परिस्कल करने में हिंदि होने की इतनी अधिक प्राप्त करना उन्हों होता। जित प्रकार एक्स से उसके जान करना स्वार्त कर से स्वार्त करना जितन समानना है कि इतना अधिक व्यय करके इन ऑकडों को प्राप्त करना जितन मामतना है कि इतना अधिक व्यय करके इन आंकडों को प्राप्त करना जितम सा प्राप्त होता हो होता।

एक बोरे चावल की किश्म का अनुभान लगाया जाता है उसी प्रकार कुछ घोड़े से मनुष्यों को चुनकर और उनके आहार सबनी औकड़ों को एकन करके नया देस के औसत का पता नहीं रूपाया जा सक्ता ? साहियकीय सिद्धान्ता के प्रयोग से यह निर्णय किया जा सकता है कि इस कार्य के लिए कितने यनुष्या का चुनाव अथेप्ट होगा या उनका चुनाव किए प्रकार किया जाये कि भीसत का अनुमान अधिक विस्तानीय हो।

देश के बारे में साधारण ज्ञान सरकार के लिए बहुत ही आवश्यक होता है। देश में क्तिना अनाज उत्पन्न हुआ है और जिनने अनाज की आवस्यकता है, इसका यदि सरकार की अनुमान न हो तो अनाज के आयात निर्याप के बारे में किसी निर्यंत्र के लिए उसके पान कोई जिल्ह्सनीय आधार नहीं होना । यदि उसे यह पता न हो कि देश में उपन आवस्यकता में एक करोड़ टन कम हुई है तो हो सकता है कि उसे अकाल का सामना करना पहे। यदि अनाज आवश्यकता ने अधिक उत्पन्न हो गया और सरकार इस ज्ञान के अभाव में अनाज के नियति पर रोक कमा देनी है तो अनाज कै दाम पिरकर देश में मदी की स्थिति पैदा हो नकती है । विशेष रूप से आजनल सरकार आगामी पाँच या दक्ष वर्षों की योजनाएँ बनाने से रूगी हुई है इसलिए उसके लिए इस प्रकार के ज्ञान की आवश्यकता बहुत वढ गयी है। यदि सरकार ने यह निर्णय कर लिया है कि पांच साल में प्रति व्यक्ति की आय में १० प्रतिशत बृद्धि हो जायेगी तो उसे इस बात का भी अनुमान हीना चाहिए कि इस बडी हुई आप ना मनुष्य क्या करेगा। किस वस्तु की माँग कितनी बढेगी और किस वस्तु की गिरेगी। या यदि उसने इरादा किया है कि राष्ट्रीय आय में १५ प्रतिशत की बृद्धि हीगी तो उसे यह भी मालूम हीना चाहिए कि जनमस्या किस तेजी के साथ वट रही है। ही सकता है कि योजना-वाल के अन्त में राष्ट्रीय आय में बृद्धि होते हुए भी प्रति-व्यक्ति शीसत आय में कमी हो जाये। इस प्रकार का साधारण ज्ञान प्राप्त करने के लिए सर्वेजण (survey) की वाबस्यकता पड़ती है। परन्तु यदि इसके लिए प्रत्येक मनुष्य से पूछनाछ की जाये तो ही सकता है सरकार की सारी आय सबँखण कराने में ही व्यम हो जाये और उमका सारा उद्देश्य ही समाप्त हो जाये 1 यदि यह जान बिलकुल ययार्थं न भी हो, तब भी, सरकार का काम चल सकता है। यदि सर्वेक्षण का खर्व नियत हो चुका हो तो दिस प्रकार कम से कम आतिपूर्ण अनुमान लगाया जा सकता है यह निश्चय करने में साध्यिकी के सिद्धान्त हमें मदद पहुँचाते हैं।

उद्योग-धर्मा में तो नमूनो के बिना काम ही नही नलता । क्षोक व्यापारी को हजारों की सस्या में भाल लेना पडता है। कोई क्लिना ही बच्छा कारखाना क्यों न हो उसमें बने हुए माल में थोडा बहुत अवस्य ही खराब होता है। यदि एव-एव चीज का निरीक्षण करके उनमें से खराब चीजो को अलग करना हो तो इसके लिए उन्हें एक अलग विभाग कर्मचारिया का रखना पडेगा। इससे उत्पादन का दाम वढ जायेगा। यद्यपि थोक व्यापारी को सब माल अच्छा मिलेगा परन्तु इस बढे हुए मृत्य के कारण उसे लाभ के बदले हानि ही होगी। किन्तु यदि उसे इस बात का सतीप विला दिया जाये कि उत्पादन में से १ प्रतिकत से अधिक माल दोपपूर्ण होने की सभावना वहत कम है और यदि इस आस्वासन के लिए इतने अधिक निरीक्षण की आवश्यकता न पडे कि वास्तव में लागत इतनी बढ़ जाये तो समवत थोक व्यापारी की सतीय हो जायगा। इस निरोक्षण का किस प्रकार प्रवध किया जाय कि थोक व्यापारी को भी सनोप हो जाये और खर्च में भी अधिक बद्धि न ही ? सास्यिकी के सिद्धान्त इसमें हमें सहायता पहुँचाते है।

अभी तो हमने उस दशा में सास्थिकी के उपयोग का वर्णन निया है जब कि माल बिकने के लिए जाता है। विन्तु उसके पहले भी बहुत-सी समस्याएँ कारलाने बालों के सामने होती है। यदि माल खराब तैयार होता है तो उसका कारण जराब कच्चा माल, कल पूजों की खराबी या परिचालक की गलती कुछ भी हो सकता है। क्यांकि खराब माल रह हो जाता है इसलिए कारखाने को यह पता लगाना बहत भावश्यक होता है कि खराब माल बनने का क्या कारण है। किस प्रकार के प्रयोग करके इन कारणों का पता लगाया जाये. यह सास्थिकी का ही काम है। कारण पता चलने पर यदि खराबी कच्चे माल में है तो उसको बदल कर अच्छी सामग्री लेकर खराबी दूर की जा सकती है। यदि कल-पूजों में है तो वहाँ खराबी है यह मालूम होने पर इजीनियर उसे ठीक कर सकते हैं। परिचालक की गलती होने पर उसे उपयुक्त ट्रेनिंग दी जा सकती है या उसे बदला जा सकता है। इन प्रयोगों में जो व्यय होता है वह साधारणतया उस बचत के सामने शन्यप्राय ही होता है जो नप्ट हुए पदार्थ के कम होने से होती है। कच्चा माल, मशीन और परिचारक के ठीक होते हुए भी कभी कभी उत्पादन में गडबडी हो जाती है। ऐसी दशा में यदि जरा-चरा-सी लराबी होने पर मशीन की व्यवस्था की जाये तो काम में रुकावट पड जाने के कारण व्यय बहुत बढ जायेगा। यह भी हो सकता है कि जिस मशीन की व्यवस्था ठीक हो वह भी बिगड जाये। इसलिए यह मालूम होना जरूरी है कि क्या वास्तव में ही मशीन में कुछ खराबी है। इसके विपरीत यदि मधीन बास्तव में खराब हो और वह जल्दी ही ठीक न की जाये तो पता नही कितना उत्पादन नष्ट हो जाये। इस दुनिधामयी स्थिति में सास्थिकी हमारी मदद करती है और तियत्रणन्वार्ट (control chart)की सदद ने यह अनुसान लगाया जा सकता है कि मसीन में व्यवस्था करने की आवश्यकता है या नहीं।

समार में तरह-नरह की वीमारियाँ फैली हुई है । इसके साथ ही इन बीमारियों के बारे में सैकडा प्रकार की भातियां भी फैली हुई है। जितने लोग है उतने ही इलाज। बहत से लोग माने हुए इलाजा की बराई करते हैं और कहते हैं कि इनकी इलाज समझना गलनो है। यह एक विचित्र परिस्थिति है जिसमें यह पता रुगाना मुस्किल हो जाता है कि किसका कहना ठीक है और क्सिका गलत । ऐसी बीमारी कम ही होती है जिनका कोई मरीज ठीक ही न हो। बिना इलाज के भी लोग ठीक हो जाते हैं। इस कारण यदि कोई मनुष्य एक विशेष औषधि के लेने के बाद ठीक हो जाता है ती यह कहना उचित नहीं है कि वह विना औपधि के मर ही जाता। परन्तु कुछ लोग इसको ही औपधि के प्रभावपूर्ण होने का प्रमाण बान लेते है। यह पता किस प्रकार लगाया जाय कि कोई औपधि असर कर रही है या नहीं। आप सोचेंगे कि यह एक अजीव समस्या है जिसका हल होना शायद सभव न हो, परन्तु सास्यिकी के पास इसका भी हल है। यदि कुल रोगिया में से ९० प्रतिशत मर जाते हैं, परन्तु एक विशेष औपिष का सेवन करनेवालों में से केवल १० प्रतिशत मरते है तो आप औपिष के प्रभाव को स्वीकार करेंगे अथवा नहीं ? आप कह सकते हैं कि यह तो संयोग की वात थी कि इस औषधि का इलाज पाये हुए लोगों में से केवल १० प्रतिशत लोग मरे। सास्यिकी हमें यह परिकलन करने में सहायता देती है कि नेवल समीगवश इतना अग्तर होना कहाँ तक सभव है।

आधुमिक चिकिस्सा-विवास (medical science) में दो दिशाओं में उनिर्व को है। एक तो रीम हीमें के बाद उसके इकाज में और दूसरे दीमारी को फैजाने से रोकने में । इस दूसरी दिशा में प्रगति के लिए यह जावस्थक है कि सीमारी के कारण का पता पंजामा जाय। कारण के जात होने पर उसको दूर करने के उपम भी मालूम किये जा सकते हैं। जिल फकार रोमों के कालक के बारे में सित्त-रिज बारागाएँ हैं, उसी भकार रोमों के कारणों के बारे में भी लोगों में मतमोद है। कोई कहता है कि जम्म रोम मच्चर के काटने से होता है, तो दूसरा वतायेगा कि अमृक बस्तु के सा केने में यह बीमारी हो जाती है। धीसरा पह कहेगा कि भीनन में जमृक बस्तु की कमी ही इसका कारण है, जब कि चीवा दमे पापों का फळ जमना देनी-देवताओं का प्रकोप समक्षता है। किसी भी मनुष्य के बीमार होने से पहले यह समब है कि उसे सच्चर ने काटा हो, उसने कोई विद्याप वस्तु लायों भी हो और उसने भोजन में किमी आवस्यक वस्तु की कमी रही हो। इसी गवाही पर कि उसे मच्छर ने बाटा था, यह निश्चय कर लेना कि बोमारी का विद्येप कारण यही है, उचिन नही मालुम होता। इसी प्रकार भोजन के किसी विद्येप आप को कभी की वजह से बीमारी होना अवस्य मभव है, परन्तु किसी विद्येप आप को कभी की वजह से बीमारी होना अवस्य मभव है, परन्तु किसी विद्येप यां को अध्ययन करने इनना पता उकाना अवस्य है। इसके लिए रोगियों के बहुत बड़े समुदाय की जांच करना जरूर है जिससे यह शाम हो वि उनमें क्या लक्षण समान ये जो उन लोगा में नहीं ये जो रोग से यदे रहे। वर्गों कि यहाँ व्यक्ति-विरोध की जांच का नहीं वरन् व्यक्तियों के समुदाय के अध्ययन वा प्रकार है, इसकिए यह मास्थिकी के क्षेत्र में साम्यिक्त है। इस प्रकार कारण वा पता लगा- कर रोगों को फैलने से रोकने में साब्यिकी ने विकरता-विराम की सहुत सहायना की

परीक्षा में निव्याधियों भी बहुता आपने यह कहते सुना होगा कि भाग्य ने उनना साम नहीं दिया। जो कुछ उन्होंने नहीं पढ़ा था उनमें से ही प्रस्त रख दिये गये। मा अमुक विद्याभी बहुत भाग्यशाली है, उनने साल भर कुछ नहीं पढ़ा, परन्तु परीक्षा के पहुंच ने महीने में उनने जो पढ़ा उत्तमें से ही सारे प्रस्त आ गये, इसी नारण वह प्रस्त भी में उत्तीण हो गया। आप शायद यह मानेंगे कि ये दाने विलक्तुल वे-वृतिमाद नहीं है। फिर भी आप यह नहीं कि यावपि कुछ विद्याधियों को भोग्यता गृही एवते, मान्य से अधिक नवर विल सकते हैं तथापि उन्न विद्याधीं को—जिसने नात्व कि सकते हैं स्वापि उन्न विद्याधीं को कि उन्न के हैं और जो गोग्य है—व्यक्त मनद निही मिल सकते।

लेकिन नया यह सच है? उत्तर प्रदेस की हाईस्कूल परीक्षा को ही लीजिए। इसमें दो लाख से अधिक विद्यार्थी बैठते हैं। यह असम्भव है कि एक ही परीक्षक इन सक्की कार्पियों जांचे। ये कार्पियों २०० से अधिक परीक्षकों में बौट दी जाती हैं। क्या यो निक्यार्थी जिल्होंने एक से उत्तर लिखे हैं वराकर नवर पार्येंगे? बिद एक ही उत्तर की दो परीक्षकों द्वारा जांच करवायी जाय तो नवरों में बहुधा यथेट अतर पाया जाया।

इस प्रकार परीलाओं में बहुत-नी कमियां है। इन्हें दूर करने के लिए, विशेष रूप से क्षेमिरका में, एक नवीन 'रीति अपनाधी गयी है। विद्यार्थी में पांच या छ लम्बे-लम्बे प्रक्त पूछते के स्थान पर सी या डेढ ही छोटे-छोटे प्रक्त पूछ जाते हैं। इन प्रकारे से विषय का जीर अग मही बचता। इस प्रकार परीका से माम के प्रभाव को काफी हर तक दूर किया जा सकता है। परीतकों के अंतर को दूर करने के लिए भी नहीं एक बड़ा मुन्दर नरीना अपनामा जाता है। हर एक प्रश्न ने चार या पाँच जत्तर दिये हुए रहते हैं जिनमें नैचल एक मही होना है और अन्य सब गलता। परीक्षामों की मेकल यह बताना हागा है कि ठीन उत्तर वीनन्सा है। यह पहले से तम ही जाता है कि ठीक होने पर विज्ञामों की गिनने नम्यर मिनेंगे और गलत होने पर विनने नबर करेंगे। इस रहता में परीक्षण के अंतर के भारण नबरों में कोई अंतर मही पड़ सकता। बात्मव में इस हालव में परीक्षण की बीई आवश्यक्ता ही नहीं रहती और नवर मती हाला होने पड़ी जाता मार्थिक स्वार मार्थिक होने पहले में स्वार मार्थिक स्वार मार्थिक होने पर सकता। वास्तव में इस हालव में परीक्षण की कीई आवश्यक्त होने मही रहती और नवर मधीन हाला होने सिंग जाता मार्थिक स्वार मधीन हाला सी विशेष जा सबने हैं।

शायद आपका ध्यान इन बार गया हा कि परीशका के अंतर की दूर करने के निए जो तरीका अपनाथा गया है उसमें फिर भाग्य और मयोग प्रवेश कर गया है। यदि कोई विद्यार्थी केवल अनुमान द्वारा उत्तर का इगित करे तो भी सयोगवा उसके द्वारा इगित उत्तर सही हो गकता है। माध्यको इन स्थान पर काम आती है। प्रश्ते के मध्यप्र और उनमें नबर देने का नर्रात इन का बनाया जाता है के केवल अनुमान के आगर पर जच्छे नम्बर पाना अगमव हो जाता है। इसके किरियान माध्यकों ना प्रयाग इन सी-डेड सी प्रश्ता के कला-अलग विश्रपण में यह जनाने के लिए होना है कि कीन-में प्रस्त ऐसे हैं जो अच्छे और तुरे विद्यार्थियों की पहचानने में वास्तय में सहायन है। इस प्रशार प्रातिक साथ को अधिक विद्यार्थियों की पहचानने में वास्तव में सहायन है। इस प्रशार प्रातिक साथ को अधिक विद्यार्थियों में पहचानने में वास्तव में सहायन है। इस प्रशार प्रातिक साथ को अधिक विद्यार्थियों में पहचानने में वास्तव में सहायन है। इस प्रशार प्रातिक साथ को अधिक विद्यार्थियों में पहचानने में वास्तव में सहायन है। इस प्रशार प्रातिक साथ को अधिक विद्यार्थियों में पहचानने में वास्तव में सहायन है। इस प्रशार प्रातिक साथ को अधिक विद्यार्थियों में परित्र नरी माध्यिकों का काफी भाम है।

पिछने पृष्ठों में जापने उन अनेन क्षेत्रों में से कुछ ना परिवस प्राप्त किया है जिनमें साहियकों का एक विजित्त स्थान है। आप यह जानने के लिए उत्हुर होंगें कि जानिय माहियकों के ये सिद्धान्त क्या है जिनकर उपयोगी क्षेत्र हतना विन्तृत है। यह हम महेले ही यान चुके हैं कि माहियकों में वो कार्य सिम्मिलत है उनमें से एक हैं में आप ना विश्लेषण करके उन्हें सिक्षण कर में रातना। अगरे अध्यान में हम देवेंगें कि जीनकों के किया कर में रातना वाहिए जिनमें हमें उन समुदायों को समजने में सरूता हो जिनसे के में महाना है।



∕र्अध्याय २

समिष्टि और उसका विवरण

६२.१ समध्टि (population)

इस अध्याय में यह बताया जायगा कि क्सी समिष्टि के वर्णन के लिए क्या विधि अपनायी जाती है और उसके साबिक्यतेग्र विवरण में क्सि प्रकार की विशेषताओं को अंत ध्यान के किंद्र तरहता है। ध्यावहार से समिष्टि ना ग्यादसं (sample) हारा प्रतिनिधित्य किया जा सकता है। परन्तु इस स्थान पर हम प्रतिवर्ग और समिष्टि में भेव नहीं करेंगे। समिष्टि में हमारा तात्त्यें कुछ विशिष्ट इकाइयों के एक समह से है। हर एक इकाई का कोई गुण (character or attribute) मापा अथवा परका जा सकता है। ये इकाइयों वी प्रकार की हो सकती है। प्रमा तो वे जिल्हें साधारण रूप से एक ही समया जाता है और जिनका अधिक विवरण करने पर उत्तके प्रामों के गुणों से पूरी इकाई के यूणी से कोई साह्य नहीं रहता। इस प्रकार की इकाइयों के उवाहरण हैं मन्या, वहीं और त्यक्ता । यदि इनके विभिन्न भागों की तुलना की जाय तो आप देखेंगे कि वे एक-इतरे से इतने भिन्न हैं कि उन्हें सरस्ता से पुक-पुक्त पहचाना जा सकता है। इसके विपरीव कुछ इकाइयों इस प्रकार की होती हैं जिनको अपेकाइत छोटी इकाइयों का समृह समझा जा सकता है। इस प्रकार की इकाइयों के उवाहरण है सिपाहियों जी दुक्तियाँ, दियासणाइयों ना डिवर, पुत्तकालय इत्यादि।

§ २२ चर (variate)

किसी विशेषता के बाप को चर (vanate or vanable) कहते हैं क्यों कि यह चित्रित्र इकाइयों के लिए वित्रित्र मान (values) बाएण कर सचता है। कुछ चर ऐसे होते हैं विकोत लिए दों मानों के बीच का प्रत्येक मान बाएण करना समत्र है। उबाहरण के लिए चुनुष्यों की ऊँचाई इस प्रकार का एक चर है। पांच और छ फुट के बीच की राभी ऊँचाइयो के अनुष्य समाव है। इस प्रकार के चर को सवत कर (continuous variable) कहते हैं। इसके विपरीत परिवार में क्लूजों की सक्या प्राप्तकार में पूर्वों की सहया था पुस्तकारव्य में पुस्तकों की सहया आदि कुछ ऐसे चर हूँ वो कुछ परिमित (finite) सख्यक विभिन्न मानों को ही भारण कर समते हैं। इस प्रकार के चर को असतत चर (discrete variable) कहते हैं।

\$ २'३ ऑकडो को सक्षिप्त रूप में रखने की विधि

समिट में अनेको इकाइयां होती है। यदि उन सबके गुणों के मापी के समूह को आपके सम्मुल रख दिया जाय तो आपको उन्हें समझना और उनमें से दाय्य प्रान्त करना कठिन हो जावगा। निनों भी बैजानिक विद्वान्त के प्रतिपादन के किए यह निजान जमस्यक हो जाता है कि उस जान को, जो मापों के समूह से प्रान्त होता है, सक्षित्न कप में रसा जाय, आवस्यक ज्ञान को अलग दिया जाय और अनावस्यक स्या अवनय ज्ञान की उपेक्षा की जाय।

सक्षिप्त करने की सास्विकीय विधि में दो विशेष भाग होने हैं ---

- (१) आँकडो को सारणी अथवा रेखाचित्रो द्वारा सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करना,
- (२) कुछ ऐसे सास्थिकीय प्रापो का कलन करना जो इन आंकड़ों की विशेषताओं का वर्णन करले हैं।

कुछ जराहएणां द्वारा इन कियाओं को समझने में आमानी होगी। मान कीजिए कि आपने आफिस में २० मनुष्य काम करते हैं। आप इन बीस मनुष्यों के समुदाय का अम्पनन करना नाहते हैं। इस निवोध अम्पना में आपको जिल बर का बिधोर स्थान है यह है इन मनुष्यों को उन्न। इसके लिए आप अलेक मनुष्य ने उसकी उन्न पूछ कर नीट कर लेते हैं। यह उन्न सारणी २ २ में दी हुई है।

प्रधम बात जो आपके ध्यान में आयी होगी यह है कि किसी समृह की उम्र सबभी विसायताओं के जाने में उस समृह के मनुष्यों के नामों का कोई स्थान नहीं है। इस प्रकार के अमस्य आन की उपेशा की जा सकती है। इसके अतिरिक्त इन उम्रा की विरोध कम में रखने पर उसके समझने में सहायता मिळ सनती है। उत्पर की सारणी के सगद मांग को हम निम्मानिश्वत सशियन रूप में रस यकते हैं।

सारणी सख्या 21 आफिस के मनुष्या के नाम और उनकी उन्न

कम संख्या	नाम	उछा निकटतम वर्षी में	कम संख्या	नाग	उस निकटतम वर्षों में
1	3	3	Z	2	3
1 2 3 4 5 6 7 8 9	अपोच्या सिह् अवध विहारी कमल कुरण नरसिंह सत्य प्रकाश ओम प्रकाश डुकुम चग्न याकुव रमेश चन्न रमेश चन्न	25 23 28 28 26 27 25 27 26 28	11 12 13 14 15 16 17 18 19	विमन् च द्र नवीन बलवत राम बलवत राम बाल इच्चा निमल हरी प्रसाद बासिम जय प्रकाश केवल राम अनीखे लाल	25 25 28 25 27 27 28 25 25 25 25

सारणी सख्या 22 आपके आफिन के मनुष्यों की उन्ना का वितरण

कम संख्या	उम्र निकटतम वर्षो में	वारवारता
1	XI.	fi
(1)	(2)	(3)
1	23	1
2	2.4	0
3	25	8
4	26	2
5	27	4
6	28	5
	कुल	20

इत्तमें हमें ग्रह पता चलता है कि भिम्न-भिन्न जनस्या के कितने मनुष्य इस समु दाय में है । वारवारता (frequency) के अयं है उन इनाइयों की मस्या जिनमें माप समान है। उताहरणार्थ 25 वर्ष की उम्र के मनुष्यों की वारवारता इस समु-दाम में 8 है। इस प्रकार की सारणी को वारवारता सारणी (frequency table) महाने है। इसके द्वारत स्यव भाग के वारवारता-वटन अथवा वितरण (frequency distribution) ने जा पता चल जाता है।

यदि हम यह जानना चाहे कि 27 वर्षे अथवा उससे कप अवस्था के वितरि मनुष्य आपके आफिस में है तो हमें उन श्वव बारबारताओं ना सोंग न रना होगा जो 27 वर्षे और उससे कम उस के मनुष्यों की हैं। इस आफिस में यह सबयी बारबारती (cumulanve frequency) 1+0+8+2+4=15 है। इस प्रकार ऊपर सी हुई बारबारता सारणी की महायता से एक सबयी बारवारता सारणी की महायता से एक सबयी बारवारता सारणी का नामी की सबनी है।

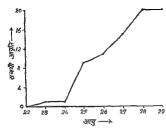
सारणी संख्या 23 आप के आफिस के सन्प्यों की उन्न की सचयी वारवारता सारणी

कम-गहया १	उद्घ निकटतम वर्षी में अः	सम्बद्धाः बारबारता Fi
(1)	(2)	(3)
1.	23	1
2	24	1
3.	25	9
4	26	II
5	27	15
6	28	20

\$ २'४ आँकडो का रेखाचित्रो द्वारा निरूपण

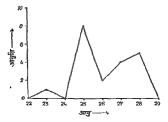
ये राचयी बारबारताएँ एक प्राफ पर बिन्दुओ द्वारा तिक्षित की जा सकती है। इन बिदुनों को प्रिलाती हुई जो रेखा श्लीची जाती है उसे मन्ययं बारबारता का रेखा-चित्र (cumulanve frequency diagram) अथना तोरल (ogive) नहते हैं।

इसी प्रकार बारबारताओं को ग्राफ पर बिन्दुओं द्वारा निरूपित करने और 'कम-गत बिन्दुओं को रेखाओं द्वारा मिला देने पर बारबारता का रेखा-चित्र बन जाता



चित्र १--संबदी बारंबारता

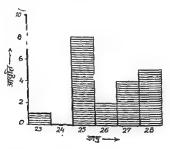
है। उम टेडी-मेटी रैला को जो इन विदुशों को मिलाती है, बारवारता-बहुभुज (frequency polygon) कहते हैं।



चित्र २—आवृत्ति बहुगुज

यदि चर कुछ परिमित (finite) मानो को ही घारण कर शकता है तो २ ग्राफ में इन मानो के लिए बारवाग्ता को विदुध। द्वारा मुचित निया जो सकता है। यदि इन विदुधों में भुनाम (axis of abscissa) पर उपने रेसाएँ सीची जायें से उनकी लवाई में इन बारवारतामा ना अधिन स्पर्ट आग्रास हो जाता है। इस प्रकार निरुप्त को रूपने (bar diagram) कहते हैं।

इसने विपरोन यदि चर मनत हो तो चर के पराम (range) को कुछ आयों में विभाजित कर दिया जाता है। मारची में प्रत्येक भाग के लिए चर की बारवारका दो जाती है। याक में इत भागा को भुजारा पर अतराकों से भूचित किया जाता है। प्रत्येक अतराज पर ऐमा ममक्षेण चतुर्भेज वनाया जा बकता है जिसका क्षेत्रक जम अतराज में चर की वाग्वान्ता की मूचित करना हो। बारवारता के इस प्रकार के निरुपण को आयत-चित्र (histogram) कहते हैं।



चित्र ३--आयत चित्र

आपत चित्र अपना बारबारता बहुमूज दोनों से हमें बारबारता सारणीं में ही हु^ह सब सूचना प्राप्त हो जाती है। बहुचा चित्र द्वारा ने बिलेचताएँ स्पट्ट हो जाती है विनचों बकों के रूप में समझना अपेखाइत कठिन है। इसी प्रवार सचयी बारबारता चित्र द्वारा सचयी बारबारता की विशेषताएँ अधिक स्पट्ट हो जाती है।

६२५ चर के परास का विभाजन

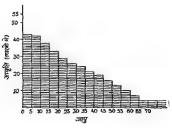
एक बात पर शायद आपका घ्यान गया होगा। उझ एक सतत चर है। जिन मनुष्यों की उझ २५ वर्ष लिखी हुई है वास्तव में उन सववी उझ एकदम समान नहीं है। उनमें महीने अथवा बिनों का अवर हो सकता है। ऐसी दवा में माग के हर मूदम-सन माग के लिए बारबारका-चिन यनाका निताल अनमय है। इसलिए इसके म्यान पर उझ के परास (range) को कुछ मागों में विमाजित कर लिया जाता है और कैवल उन्हीं भागों के लिए बारबारता-सारणी बनायी जाती है। उवाहरण के लिए अगर की बाराणीं में २३ वर्ष का अर्थ है २२५ में लेकर २३५ वर्ष तक का अतराल। आयत चिन्न इसको ही ध्यान में रखनर बनाया जाती है।

यदि चर परिमित हो तो भी परास को इस प्रकार विभाजित करने की आव-प्यकता पठ सकती है। यह तब होता है जब छोटो इकाइयो की तुछना में परास बहुत अधिक हो। उदाहरणार्थ अदि एक नगर के मनुष्या की आय के अनुसार बारबारता-सारगी बनायी जाय तो आयो का परास घूम्य से छेकर दस हजार रुपये मासिक तक हो। सकता है। यदि एक एक घपये की आय के अवट से बारबारता मालूम की जाय तो के केवल बहुत अधिक गेहनत गटेगी वरन् इस बृहद् सारणी को समझना और उससे किसी तरक को प्राप्त करना असमब हो जायमा। इसकिए परान की अपेक्षाछत कम मामा में विभाजित करना आयश्व हो जायमा। इसकिए परान की अपेक्षाछत कम मामा में विभाजित करना आवश्व हो जायमा। से सामारन्तया बीस या पक्षीस से अधिक भागो में विभाजित करने से सारणी को समझने में कठिनाई पढ़ती है।

यदि हो सके तो इन भागों का—जिनमें परास को विभाजित किया जाता है— वराबर होना अच्छा रहता है। परतु कई बार भागों के बराबर होने से कठिनाई हो जाती है। उदाहरण के लिए आयों के परास को यदि बील भागों में बोटा जाम दो प्रयोक माग पांच सो रुपयों का प्रतिनिधित्व करेगा। इनमें से केवल दो भाग १,००० से कम आप का मितिपियत्व करेंगे। और अठारह भाग एक हजार से लेकर दस हजार रुपये तक की आय का। नगर की एक लाख से अधिक जनसच्या में शायद आठ दस मनुष्य हो ऐसे हामें जिनकी मासिक आय एक हजार रुपये से अधिक हो। यह स्पष्ट दै कि आयों के जगर लिखित बराबर विभाजन हारा हम बहुत सा जान को देंगे। इस भगार की स्थित में पहिले छोटे और फिर कमदा बड़े भागा में परास को विभाजित करना आवस्प्रक हो जाता है। नीचे बारबारता-सारणी और उसके लेखानिश्रीय निरूपण (graphic representation) के भूख उदाहरण दिवे हुए हैं।

सारणी सरया 2 4 उत्तर प्रदेश के पूछ्यों की उम्रन्यारवारता-सारणी

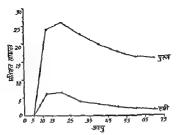
क्रम सस्या	उम्र का अंतराल (वर्षी में) (2)	पुरुव-मस्या (मैकडो में) —(3)	कम सल्या	उम्र का अतराल (वर्षों में)	पुरुष-सस्या (सैकडो में) (6)
1 2 3	[0-5] [5-10] [10-15]	42 694 41 965 37 671	9	[40—45) [45—50 [50—55)	18 516 15 934 12 967
4 5 6 7 8	[15-20] [20-25] [25-30] [30-35] (35-40]	33 008 29 112 26 296 23 793 21 202	12 13 14 15	[55—60) [60—55) [65—70] [70— जुल	9 870 6 876 4 349 6 736 330 989



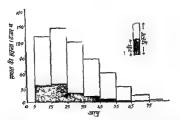
वित्र ४--- उत्तर प्रदेश के बृहवों की आयू-आवृत्ति का आवत चित्र

उत्तर प्रदेश में उम्र और माक्षरता--(मस्माएँ रस की इनाइयो में) सारणी संख्या 25

,	समिट और उसका विवरण						
75-		4,357	28,582	15 24	481	33,029	1.46
(52-29)	(or)	11,260	70,197	1604	1,284	69,858	184
[0-5] [10-13] [15-25] [25-35] [35-45] [45-55] [45-55] [55-65] [65-75] [75-	8	29,574 99,254 143,441 116,853 80,350 55.550 28,738 11,260 4,357	426,063 419,039 418,368 552,691 507,412 406,482 307,213 174,655 70,197 28,582	706 2372 2595 2303 1977 1808 1645 1604	9,777, 22,107 33,546 18,700 10,626 6,408 3,672 1,284	415 794 383,741 351,682 510,778 449,748 343,205 254,988 151,069 69,858 33,029	2 43
[45-55]	(8)	55.550	307,213	18 08	6,408	254,988	2.51
(45-55)	(2)	80,350	406,482	1977	10,626	343,205	3 IO
[35-45)	9	116,853	\$07,412	23 03	18,700	449,748	416
[25-35]	3	143,441	\$52,691	2595	33,546	\$10,778	6 57
[15-25]	(4)	99,254	418,368	23 72	22,107	351,682	6 20
[10-15]	(3)	29,574	419,039	200	1777	383,741	2 55
[ō_5]	(3)	0	426,063	000	٥	415 794	000
आयु-अतराक	(1)	माक्षर	() () () ()	(3) प्रतिशत-साक्षर	साक्षर	150 160	वाँ (तो प्रतिसत्साधर ००० २९६ ६३० ६६७ ५५७ ३१० ३१ 243
		Ξ	13	18	[€	13	[3
1		ь	10	b	F		zi.



नित्र ५ — उत्तर प्रदेश में प्रतिशत साक्षरता



चित्र ६-- ७० प्र० में साक्षरता का आयत चित्र

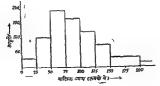
नोट---जतराल [., b) से उन सब सब्याओं के समुदाय को सूचित किया जाता है जो b से छोटी और २ के चरावर अथवा २ से बड़ी है। इसी प्रकार (a, b) से उन सब्याओं के समूबाय को सूचित विया जाता है जो ॥ से बढ़ी और b के बरावर अथवा b से छोटी है।

समद्धि और उसका विवरण

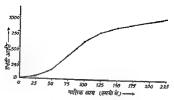
सारणी सख्या 26

फरीदाबाद के एक हजार परिवारो का प्रतिमास-व्यय के अनुसार वितरण

क ष	प्रतिमास व्यय (रुपयो में)	परिवारो की संख्या	सनयो बारबारता	
(1)	(2)	(3)	(4)	
1	[0-25 5)	34	34	
2	[25 5—50 5)	122	150	
3	[50 5-75 5)	234	390	
4	[75 5—100 s)	203	592	
5	[100 5-125 5)	τ46	738	
Ó	[125 5-150 5)	94	832	
7	[150 5-200 5]	100	932	
8	[200 5	68	1,000	
Ь				



चित्र ७ - फरीदाबाद के परिवारों का मासिक व्यय के अनुसार वितरण-भायत वित्र

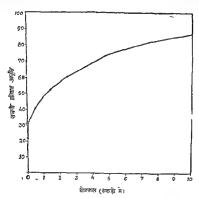


चित्र ८--फरोदाबाद के परिवारों का मासिक स्यय के अनुसार सचयों आवृत्ति चित्र

सारणी सख्या 27 अभिकृत जनीन केक्षेत्रफल के अनुसार भारतीय ग्राम परिवारो का प्रतिश्वतता वितरण

		The state of the s
স্থিতির ধারদজ্য (एকটা দী) (I)	परिवारो की अविशसना (2)	अधिकृत रोजकल परिवारों की प्रतिशतता
[0-0 005] [0 005-0 045] [0 045-0 095] [0 045-0 995] [0 495-0 995] [0 995-1 495] [1 495-2 495] [2 495-4 995] [4 995-7 495]	22 00 09 78 02 74 06 12 06 25 05 29 08 58 13 66 08 16	(1) (2) 7 495—9 995) 04 71 9 995—14 995) 02 66 19 995—24 995) 01 07 24 995—29 995) 01 07 29 995—39 995) 01 07 39 995—49 995) 00 50 49 995—74 993) 00 55 74 995—75 995) 00 55

जपर के बारवारता चित्रा और आयत चित्रों को देखकर एक बात आपके प्यान में आयी होगी। प्राय सभी लाकछों में एक केंद्रीय प्रकृति (central tendency) है। किसी विशेष भाग में बारबारता लिंगतम है और उनके दोगों भोर बारबारता कमस्र कम होता चली खाती है। बहुत छोटी अथवा बहुत बड़ी राशियों की बारबारताएँ कम है। यदि इस नेन्द्रीय प्रवृत्ति का और इसके दोनों ओर की बारबारताओं के प्रसार (dispersion) वा भी हमें कोई माप



पित ९--भारतीय ग्राम परिवारो का अधिकृत क्षेत्रफल के अनुसार वितरण-सवयी आविति वित्र का एक भाग

(measure) मिल जाय तो मोटे रूप में हमें समस्टि के स्वरूप का शान ही जाता है। नीचे केन्द्रीय प्रवृत्ति के कुछ मामों की व्याख्या दी हुई है।

९२६ केन्द्रीय प्रवृत्ति के कुछ माप

(क) समान्तर माध्य (anthmetic mean) या केवल माघ्य (mean) यदि समिट की सब इकाइयों के चरों के मानी को जोडकर उसमें इकाइयों की उरों के मानी को जोडकर उसमें इकाइयों की कुल सहया का माग लगाया जाय दो फल को रागानान्तर माध्य अववा केवल माध्य

कहते हैं। यदि $x_1^*x_2^*x_2^*=x_n^*$ चरा ने मान है तो माध्य-—जिसे साधा-रणतथा x से मूचित किया जाता है—को निम्न लिशित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

$$\bar{\chi} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \qquad \dots \langle 2 | 1 \rangle$$

माना के योग को सूत्र रूप में लिखने की एक और उत्तम विवि है। $x_1+x_2+x_3+x_6$ िखने के स्थान में हम इस योग को सक्षिप्त रूप में $\sum_{i=1}^n x_i$ लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए $\sum_{i=1}^n x_i$ का अब है $x_1+x_2+x_3+x_6$ ।

यदि आंकड़े बारबारता सारणी के रूप में दे रखे हो तो माध्य प्राप्त करने के लिए तिम्नुलिखित सुत्र का प्रयोग किया जा मकता है

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{\infty} f_i} \qquad (2 2)$$

लहीं कुछ k अवराका में परास की विभाजित किया गया हो और 1 में अवराक का मध्य जिल्हु k, तथा इस अवराक में वारवारता $\int_{\Gamma} g \mid 1$ मब्दिए एक अवराक में भी सब मान उसके मध्य बिंदु के बराबर नहीं होते किर भी यदि अवराक बहुव बंबा न हो वो इन सब मानों के माध्य की अवराक का मध्य बिंदु मान केने से कोई विशेष होती |

आइए हम इस माप से परिचय प्राप्त करने के लिए पूर्व परिचित बारबारता सार्राणयों की सलायता लें।

(१) मारणी सस्या 22—जाफिम में काम करने वाले सनुदयो की औसत σ स्राप्त को σ से सचिव किया जाय तो—

$$\widetilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{20} f_i}$$

= 26.12 ad

यदि सारणी में अतराल बराबर हो, जैसा कि जबर के जबाहरण में है, तो माध्य का परिललन बहुत सरल हो जाता है। इस अतराल को एकाई मानवर और विसी मी स्वेच्छ (arbstrary) मूर्लीबडु (ongm) को लेकर अतरालों के मध्य बिहुओं को नबीन सक्वाओं के द्वारा निरूपित किया जा सकता है। इस प्रकार नीचे दी हुई सारणी प्राच्य होगी।

सारणी सस्या 2 2.2

कम सख्या	सध्य बिदु (वर्षी	25 वर्ष को मूर्लावदु और 1 वर्ष	बारवारता
, ,	की इकाई में) x.	को इकाई मानकर मध्यविदु का निरूपण (13) = m.	£
(I)	(2)	(3)	(4)
	23	-2	I
2	24	—r	٥
3	25 26	0	8
4	26	I	2
5	27	2	4
6	28	3	5

कपर विपे हुए विज्यास (atrangement) से यह स्पट्ट है कि किसी भी अंतराल के मध्यविन्दु का पूर्व-निरूपित मान x_i =2 $5+m_i imes 1$ वर्ष

$$\begin{array}{ll}
\vdots & \widetilde{X} = \sum_{i=-1}^{6} X_i f_i \\
& \underbrace{\sum_{i=-1}^{6} f_i} \\
& = \sum_{i=1}^{6} \{25 + m_i\} f_i \\
& \underbrace{\sum_{i=1}^{6} f_i} \\
& \underbrace{\sum_{i=1}^{6} f_i}
\end{array}$$

$$=25^{-\frac{1}{5}}\frac{m_i \ j_i}{\sum\limits_{i=1}^{6} \int\limits_{i=1}^{4\tilde{\mathbf{q}}} \tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$=25+m$$

जहाँ 🖟 मध्यविद्धा के नवीन माना का माध्य है।

$$= 25 + \frac{(-2 \times 1) + (1 \times 2) + (2 \times 4) + (3 \times 5)}{20}$$

$$= 25 + \frac{23}{20} \text{ add}$$

$$= 26 \text{ 1.5 add}$$

इम उदाहरण में नबीन और आरिशक मध्यिवहुओ के मतराछ समान ये है इसलिए अब हम एक दूसरा उदाहरण लेंगे जिममें ये अतराछ बराबर न हो। मारणी नक्या 24 इमके लिए उपयुक्त होगी। यहा हम केवल प्रथम 14 अतराजी पर विचार करेंगे। मान लेजिए वारम में अवराल h हो और नबीन मध्यिवहुमी

के किए x_k की मुर्शिद्ध माना गया हो तो— $x_i = x_k + (s-k) h$ $= x_k + m_i h$ $... = \frac{\sum_i (x_k + m_i h) f_i}{\sum_i f_i}$ $= \sum_{k + \tilde{m} h} h \qquad (23)$

सारणी सख्या 242

वारका सच्चा ४४४								
कम सङ्ग्रा	आरभिक मध्यविद्	नवीन मध्यविदु	बारबारता		ऋम सस्या	आर(भकः मध्यविद्	नवीन मध्यविद्	बादबादती
(I)	-x ₁ (2)	(3)	(4)		(I)	(2)	(3)	$-\frac{f_i}{(4)}$
1 2	2 5 7 5	-6	42 694 41 965		8	37 S 42 S	I 3	21,202
3	125	-4 -3	37 671 33 008		10	47 5 52 5	3	15,934
5	22 5	2 T	29 112 26 296		12 13	57.5	5	9,870 6 876
7	27 5 32 5		23 793		14	675	7	4,349

उत्तर प्रदेश के पुराशे की माध्य जामु
$$\widetilde{x}$$
=(32.5+ \widetilde{m} ×5) वर्षे \widetilde{m} =[1×(21,202 - 26,290)+2×(18.516 - 29,112) +3×(15,934 - 33,008)+4×(12.967-37.671) +5×(9,870 - 41,965)+6×(6,876 - 426,94) +7× 41,349]× $\frac{1}{331,989}$ == $\frac{-1}{331,989}$ [5.994+2×10.596+3×17,074 +4×24.704+5×32.995+6×35,818 - 7×4,349]

$$= -\frac{521,344}{331,989}$$

(क्त) केंद्रीय प्रवृक्ति का एक अन्य माप माध्यका (median) है। जब सब प्रेक्षणों को उनके मानों के बढ़ते हुए परिमाणों के अनुसार वि यास किया जाता है तो मध्य के प्रेक्षण को माध्यका कहते हैं। यदि इस विन्यास के अनुसार प्रथम प्रेक्षण गा मात्र x_1 , वितीय वा x_2 , , अप्तम का x_{2m+1} हो तो माध्यका x_{m+1} है। यदि कुछ प्रेषणों को सक्या विषम (odd) न होकर सम (even)—2m है। तो माध्यिका मध्य के दो मानों x_m और x_{m+1} का माध्य $\frac{1}{2}$ ($x_m + x_{m+1}$) होनी है।

पदि ऑकडे बारबारता सारणी के रूप में दिये गये हो तो कुछ अधिक परिकलन की आवरयकता पड़ती है। सचयी बारवारता के आधार पर हम यह आधानी से पाकृष कर सकते हैं कि गाविका कीन से अतराज में स्थित है। इस अतराज की माध्यक अन्तराज ($median\ interval$) कहते हैं। मान जीनिए कुळ प्रेसमो की मस्था n है। सचयी बारवारताएँ कमरा F_{1} , F_{2} F_{p} , F_{p} , F_{g} हैं जहाँ कुळ अतराजों की सरया s है। यदि $F_{p} < \frac{1}{2} \leqslant F_{p+1}$ तो गाध्यका अतराज (k+1) वाँ है। मान जीनिए कन्तराजों के सीमान्त बिंदु कमरा x_{1},x_{2} ,

. x, है। इस परिकलन के लिए यदि यह मान लिया जाय कि अन्तराल में किमी भाग में बारवारता उस माग की लगाई की समानुपानी (proportional) है तो

माध्यका
$$= x_k + (x_{k+1} - x_k) \times \frac{\left(\frac{n}{2} - F_k\right)}{\left(F_{k+1} - F_k\right)} \dots (2.4)$$

उदाहरण

(१) मारणी मरया 23 में n≈20 शीमरे अतराल तक सचित आवृत्ति 9, तथा चौचे शक 11 है। इसलिए माध्यिका अतराल बौचा है। इस अतराल का प्रथम बिंदु 25 5 वप है तथा अनिम बिंदु 26 5 वर्ष है।

$$x_k = 25 5 3 वर्ष$$
 $x_{k+1} = 26 5 3 वर$
 $\frac{n}{2} = 10$
 $F_k = 9$
 $F_{k+1} = 11$

' माध्यिका=25 5+1×} वर्ष

== 26 वप

(२) सारणी सस्या 26 में

$$x_k = 75 50 रुपये$$
 $x_{k+} = 100 50 रुपये$
 $\frac{n}{2} = 500$
 $F_1 = 390$

 $F_{k+1} = 592$

=75 50+13 бा रुपये =80 ाा रुपये

 (ग) वहुल्च (mode) वेन्द्रीय प्रवृत्ति का तीसरा माप है। यह बर का वह मान है जिसकी वारबारता सबसे अधिक होती है। यदि आंबडे वारवारता सारणी के रूप में दिये हुए हो तो उस अतराल को जिसमें वारवा रता सबसे अधिक होती है बहुलक-अतराल (modal mterval) कहते हैं । बहुलक के विजेष मान के लिए उस अतराल का मध्य विंदु लिया जाता है जिसमें बारवारता सबसे अधिक हो ।

उदाहरण —

(१) सारणी सक्या 2 2 में सबसे अधिक बारबारता 🏿 उस अतराल में है जिसका मध्यबिंदु 25 बर्ष है। इससिए आफिस में आयु का बहुळक 25 वर्ष है।

(२) सारणी सस्या 2.4 में सबसे अधिक बारबारता प्रथम अतराल में है जिसना मध्यविद्व 2.5 वर्ष है। इसलिए उत्तर प्रदेश के पुरपों की आयु वा बहुलक 2.5 वर्ष है।

(३) सारणी सस्या 25 के दो माण है एक में पुरुषों के लिए और दूसरे में रिक्यों के लिए सासरों की बारबारताएँ उस के अनुसार दो गयी है। इसमें महलक का परिकलन करने के लिए हमें दूसरी विधि अपनानी पड़ेगी क्योंक सब अतराल साम नहीं है। यह स्पप्ट है कि यदि कियों अतराल को दूसरों वी अपेका बहुत बड़ा बना दिया जान तो उसमें बारबारता अपेका हत अधिक होगी। हम चाहेंगे कि हमारा माप जहीं तक हो चके उस विधि ने स्वतन्त्र हो जिमके अनुसार कुल परास को अतराल में में विभाजित किया जाता है। इसके लिए युक्तस्वयत्व यह है कि अतराल की प्रति हमाई के लिए वारावारता जिस अतराल में अपिक हो उसे वहलक-अतराल सममा जाय और बहुतक को उसका मध्य बिंदु माना जाय। उदाहरण के लिए सारणी सस्या 25 में साक्षर पुरुषों की प्रति इकाई बारबारता अतराल [10 – 15) में 99,254

 $^{19,850\,8}$ है जो अन्य अंतरालों की प्रति इकाई बारवारता से अधिक है। अंतराल (15-25)में यह प्रति-इकाई बारवारता केवल 143,441 10 10 10

हैं। इस प्रकार बास्तविक बहुलक और सारणी से प्राप्त बहुलक में अंतर बम हो जाता है। सारणी संस्था 25 में, इस दुष्टिकोण से, स्त्री व पुष्पी दोनो के लिए पहुलक 125 वर्ष है। यानी साक्षर लोगों में सबसे अधिक संस्था 12 से 13 वर्ष तक के व्यक्तियों की है।

९२७ प्रसार के कुछ माप

केन्द्रीय प्रमृत्ति के इन तीन मापो के आधार पर हमें समस्टि का कुछ ज्ञान प्राप्त होजा है। परतु यह यथेट्ट नही है। आपने यह कहावत सुन ही रसी होगी कि "लेला जोसा ज्यो वा स्थो, सारा तुनना दूबा क्या ?" एव मनुष्य परिवार महित कियो नदी को पार कर रहा था। जब उसे मालूम हुआ कि नदी में पानो को जौसन गहराई केवल एक फुट है तो नान पल्या अपन्नव समझकर और उसका अर्च बचने के लिए उसने पैटल ही नदी पार करने का फैमला किया। परसु वीच में नदी की गहराई थीम फुट तक थी और नारा कुनवा पैटल नदी थार करने के प्रयत्न में दूब गया। यह स्पट है कि इन केन्द्रीय प्रवृत्ति के साथी वे दोनो मोर बारवारताओं के सहार (dispersion) को समझने के लिए कुछ अस्य मायो की भी आवश्यकता है। इनमें से कुछ एक्य माथ भीचे दिखे हुए हैं।

(क) परास (range) चर के महत्तम और स्वृत्तम मानो के अंतर को कहते हैं। उदाहरण के लिए सारणी महता 2 2 में न्यूनतम आयु 22 5 वर्ष और महत्तम 28 5 वर्ष है। इसलिए आफिस में काम करने वालो की आयु का परास 6 वर्ष है।

(ख) मानक विचलन (similard deviation) चर के किसी विशेष मान x_i का माध्य \overline{x} से विचलन (deviation) $(x_i - \overline{v})$ है। कुल विचलनों का योग साम है।

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\overline{x}$$

$$= 0$$
च्योकि $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

परतु इन विचलनी का बर्ग माध्य $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i)^2$ शून्य नहीं है

बयोजि इस योग में प्रत्येक पद घनात्मक हैं। इस वर्ग माध्य का वर्गमूल (square toot) प्रसार का एक अन्य उपमृक्त भाष है। इसको विचलन-वर्ग माध्य-मूल (root mean square deviation) या साधारणत भानक विचलन कहते हैं। लपुरंप में हम इसको माठ वि० से मूचित करेंगे।

:. (Ho for)
$$^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$
 . (25)

यदि आंकडे बारबारता सारणी के रूप में दिये हुए हो तो-

$$(\pi_{0} \circ \widehat{\sigma}_{0})^{2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_{i} \left(x_{i} - \overline{x}\right)^{2}}{\sum_{j=1}^{k} f_{j}} \dots \dots (2.6)$$

जहां सारणी में कुल L अतराल है और 1 में अतराल में बारवारता रि है। यह तो हमें सूत्र (2.2) द्वारा पता ही है कि—

$$\widetilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

संस्थात्मक अभिगणना (anthmetical computations) के लिए सूत्र (2.5) और सूत्र (2.6) में बगं-योग को अधिक सुविधाजनक रूप में रखा जा सकता है।

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i x + \bar{x}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i + u \bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \bar{x}^2 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (27)$$

$$\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{k} f_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} f_i) \bar{v}^2 \qquad . \qquad . (2.8)$$

$$\therefore (\text{Wo for } s)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \, x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} - \overline{x}^2 \qquad ... \quad ... \quad (2.6.2)$$

उदाहरण—

(१) हारणी सत्या
$$(z^2)$$
 $\bar{x}=26$ 15 वर्ष
(मा॰ वि॰) $^2=\left[\frac{\{(23)^2\times 1\}+((25)^2\times 8\}+\{(26)^2\times 2\}+\{(27)^2\times 4\}}{20} + ((28)^2\times 5\}-(26.15)^2\right]$ (वर्ष) $^3=\left[\frac{13,717}{20}-(26.15)^2\right]$ (वर्ष) $^2=\left[685\ 8500-683.8225\right]$ (वर्ष) 2

ऊपर हमें 23 से लेकर 28 तक कें बकों के वर्षों का परिकलन करना पड़ा। पदि मान और वर्षे बड़े होते तो यह परिकलन काफी कठिन हो जाता। हम देख चुकें हैं कि माध्य का परिकलन रथेच्छ मूल बिंदु को लेने से बहुत सरल हो जाता है। मानक विचलन का वर्षों भी तो एक भाष्य है। इसलिए इसके परिकलन को भी स्वेच्छ मूल विंदु लेकर सरल बनाया जा सकता है।

यदि मान a को स्वेच्छ मूल विदु माना जाये और

=2°0275 (वर्ष)2

$$\begin{aligned} & x_i = a + x_i' \\ & \overline{x} = a + \overline{x}' \end{aligned}$$

$$& \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$& \overline{x}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i'$$

$$& \overline{x}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i'$$

$$& \vdots \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^n ((a_i + x_i') - (a_i + \overline{x}'))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_{i}' - \bar{v}')^{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{i}'^{2} - n \bar{x}'^{2} \dots (29)$$

यदि ऑकड़े ऐसी बारबारता सारणी के रूप में दिये हुए हो जिसमें अंतराल बरावर हो, तो सक्यारमक परिकलन को निम्मिळिजित विधि से सरल बनाया जा सकता है।

$$x_i = x_r + (i-r)h$$

 $\approx x_r + m_i h$

णहाँ 1 वें अतराल के मध्य विदु x_r को स्थेच्छ मूळ-विदु मान लिया गया हो और अतराल का मान h हो ।

$$\therefore \quad \varkappa_i - \widetilde{\varkappa} \implies (m_i - \widetilde{m}) \quad h$$

णहाँ
$$m = \frac{\sum\limits_{i=1}^k m_i f_i}{\sum\limits_{i=1}^k f_i}$$

..
$$\sum_{j=1}^{k} f_i (x_i - \widehat{x})^2 = h^2 \sum_{j=1}^{k} f_i (m_i - \widehat{m})^2$$

= $h^2 (\sum_j f_i) \times (m_i \in \mathbb{N})$ in \mathbb{N}

...... (2 10)

आइए, हम करर के जवाहरण में बा॰ बि॰ का परिकलन इस सुगम रीति सें करें। पहिले की भांति 25 वर्ष को स्वेच्छ मूळ-बिंदु मान लीजिए अर्षात् t=3 तथा h=1 है। जत $x_i=25+(t-3)$ ।

20×(मा॰ वि॰)² = { $(-2)^2 \times I + (I^2 \times 2) + (2^2 \times 4) + (3^2 \times 5)$ } -20×(I.I.5)²] (वर्ष)²

$$= [67 - 26 \ 45] \ (\bar{q}\bar{q})^2$$

$$= \left[\frac{40.55}{20}\right] \ (\bar{q}\bar{q})^2$$

$$= 2.0275 \ (\bar{q}\bar{q})^2$$

मानक विचलन के परिकलन के पूर्व उसके वर्ग वा परिकलन करना पडता है। इस वर्ग को प्रसरण (variance) वहते हैं।

(ग) साध्य-विखळन (mean deviation)—प्रसार के माप के लिए मिन मिन विखलने (x,—x) के योग से काम नहीं चळ सकता क्योंकि इसका मान प्रत्येक समस्टि के लिए ब्रूच होता है। परनु यदि निवलनो के निर्पेक्ष मानो (absolute values) अर्थात चन जयवा ब्रह्म चिह्न विहीन सस्यास्मक मानो के मान्य का पिकजन किया जाय तो हुँग एक ऐसी राशि प्राप्त होती है जिसको प्रयोग प्रसार के माप के लिए किया जा सकता है। इस माप को आध्य विखलन (mean deviation)) कहते हैं।

माध्य विचलन
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}-x_{i}\right|$$
 . (2.11)

मही [x,-x] के अप है (x,-x) और (x-x)
में से वह राखि जिसका मान चनारनक (positive) हो।
अपना यदि जारनारता सारणी से परिकलन करना हो ती-

$$\sum_{i=1}^{k} f_i \mid x_i - \overline{x} \mid$$

সাঘ্য দিখলন $\Longrightarrow \frac{1}{k}$ (2 12)

उदाहरण

सारणी सख्या 2 2 में रू=26 15 वर्ष होने के कारण साध्य विचलन

$$= \frac{1}{20}[(3\ 15\times 1) + (1\ 15\times 8) + (0\ 15\times 2) + (0\ 85\times 4) + (1\ 85\times 5)] \text{ at}$$

$$= \frac{1}{20}[3\ 15 + 9\ 20 + 0\ 30 + 3\ 40 + 9\ 25] \text{ at}$$

माध्य विचलन=1 265 वर्ष

(प) जब सब प्रेक्षणां का उनके परिपाणों के बनुसार विन्यास किया जाता है तो मध्य के प्रेक्षण को माध्यिका कहते हैं। इसी प्रकार वह प्रेक्षण जियसे 25 प्रतिगत प्रेक्षण छोटे और 75 प्रतिशत प्रेक्षण वर्ड होते है—प्रयम-खतुर्षक (first quartile) कहलाता है । जिस प्रेक्षण से 75 प्रतिशत अवलोवन छोटे और 25 प्रतिशत प्रेक्षण बड़े होते है वह तृतीय चतुर्यंक कहलाता है। द्वितीय चतुर्यंक स्वय माध्यिका होता है।

तृतीय चतुर्यंक और प्रथम चतुर्यंक के अंतर को अंतरचतुर्यंक-परास (inter-quartile range) कहते हैं। यह भी प्रसार का एक माप है।

परिमाणों के अनुसार जिल्लास में जैसे 25-25 प्रतिशत प्रेक्षणों के अंतर पर सनुपंक होते हैं उसी प्रकार दस दस प्रतिशत के अंतर पर दसमक (decile) तथा एक एक प्रतिशत के अंतर पर सत्ततमक (percentile) होते हैं। दसमको तथा शततमको द्वारा प्राप्त सनुपं वितरण का भास हो जाता है। परतु जब तक वारबारता चित्र न बनाया जाय तब तक इन सौ यापों से तस्य को पाना इतना ही किन हो जाता है जितना के कुल भेवणों से। इसिलए केंद्रीय प्रवृत्ति तथा प्रमार के मापों के अतिरित्त दो और माप पजुल्ता (Kutosis) और वैयन्य होते हैं जिनते हमें वितरण को समतने में सहायता क्रिकती है।

९ २'८ घूर्ण (Moments)

हतके पूर्व कि हम हम दो मापो का वर्णन करें, आहए आपको एक समुदाय से पिरिचत कराया जाय जिसके दो सबस्यो से आप पहिले ही परिचय प्राप्त कर चुके हैं। इस समुदाय के सदस्यों को घूर्य (moment) कहते हैं। यदि हम किसी वितरण के समुदाय के जाप के हित कर पह जाता है। वितरण के में पूर्व को १२ से सुचित करते हैं और इसकी परिभाषा निम्मिलिणित सुन द्वारा है। वितरण के में पूर्व को १२ से सुचित करते हैं और इसकी परिभाषा निम्मिलिणित सुन द्वारा होती है।

$$\mu_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{x_i})^r$$
(2.13)

णहाँ कुल प्रेसणों की सख्या म है, ४, ं वाँ प्रेसण है और ४ प्रेसणों का साध्य है। इस प्रकार के घूणें को जो माध्य के अन्तरों से सविषत है माध्यातरिक पूर्णें (moment about the mean) कहते हैं। इसी प्रकार किसी और मान ४ के अतरों से सविषत पूर्ण को त-आतरिक पूर्ण कहते हैं और दरों (1 र्यों प्रेसिन करते हैं।

$$\mu_r^{(a)} = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n} (x_i - a)^r$$
 (2.14)

माध्यातिक पूर्णों को 2-आतरिक पूर्णों के रूप में रखा जा सकता है।

$$\begin{split} m\mu_{r} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{c} x_{i} - \overline{\lambda} \end{array} \right)^{r} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\begin{array}{c} x_{r} - a \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} x_{r} - a \end{array} \right) \right]^{r} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{c} \lambda_{r} - a \end{array} \right) r - \left(\begin{array}{c} x_{r} - a \end{array} \right) \right]^{r} \\ &+ \left(\begin{array}{c} x_{r} - a \end{array} \right)^{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\lambda_{r} - a \right)^{r} - 2 + \left(-1 \right)^{r} n \left(\overline{\lambda} - a \right)^{r} \right) \end{split}$$

बयवा $\mu_r = \mu_r^{(0)} - \binom{r}{2} \left(\tilde{x} - d \right)_{\mu_r + 1}^{(0)} + \binom{s}{2} \left(\tilde{x} - d \right)^q \mu_r^{(0)} + \cdots$

 $\mu'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \tilde{x}$

तया
$$\mu_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (v_i - \vec{x})^2$$

इस मान्यान्तरित द्विनीय भूग को प्रसरण (satiance) कहते हैं। आप इन दो भूगों से पहिले से ही परिचित है।

§ २९ वैषम्य और कक्दता

दो मुख्य लक्षण जो विवरण के रूप की व्यास्था करते है (१) वैपन्य (skewness) या असमिति (asymmetry) तथा (२) ककुदता (kintoss) या शिक्षाता (peakedness) है। इन दो लक्षणों के साप कमश्र β_1 और β_2 हैं। इनको परिमाण जिन्नलिसित सुत्रों से होती है।

फुटनोट —(1), (12) इत्यादि की परिभाषा के लिए देखिए समीकरण (3 15)

उदाहरण —मारणी सक्या 2 2 2 2
$$\mu_9''^{25}$$
] $=\frac{\tau}{20}\left[((-2)^8 \times 1) + \{(1)^8 \times 2\} + \{(2)^8 \times 4\} + \{(3)^8 \times 5\}\right](\pi \vec{q})^8$

$$=\frac{\tau}{20}\left[-8 + 2 + 32 + 135\right](\pi \vec{q})^8$$

$$=\frac{161}{20} (वपं)^3$$

$$= 8 \text{ os } (\forall \vec{q})^{8}$$

$$\mu'_{4}^{(25)} = \frac{1}{20} \left[\{(-2)^{4} \times 1\} + \{(1)^{4} \times 2\} + \{(2)^{5} \times 4\} + \{(3)^{4} \times 5\} \right] (\forall \vec{q})^{4}$$

$$= \frac{1}{20} \left[16 + 2 + 64 + 405 \right] (\forall \vec{q})^{4}$$

$$= \frac{487}{20} (\vec{a}\vec{q})^4$$

यह हम पहिले ही कलन कर चुके हैं कि

$$\therefore \mu_2 = \mu'_2 - (\bar{x} - 25)^2$$
= $[3.35 - (1.15)^2] (\bar{q}\bar{q})^2$
= $2.0275 (\bar{q}\bar{q})^2$

$$\begin{array}{l} \mu_3 = [\mu'_3 - 3\mu'_3(\bar{x} - 25) + 2(\bar{x} - 25)^3] (\vec{q}\vec{q})^3 \\ = [\{8 \text{ 05}\} - \{3 \times 3 \text{ 35} \times 1 \text{ 15}\} + \{2 \times (1 \text{ 15})^3\}] \vec{q}\vec{q})^3 \end{array}$$

$$\mu_4 = [\mu'_4 - 4\mu'_3(x-25) + 6\mu'_2(x-25)^2 - 3(x-25)^4] (34)^4$$

$$= [\{2435\} - \{4 \times 805 \times 115\} + \{6 \times 335 \times (115)^2\}$$

β,

$$\begin{aligned}
&-\{3\times\{1\,15\}^4\} \mid (\vec{\eta}\vec{\eta})^4 \\
&= [24\,35-37\,03+26\,58225-4\,90198425] (\vec{\eta}\vec{\eta})^4 \\
&= 9\,00026575 (\vec{\eta}\vec{\eta})^4 \\
&= \frac{\mu^2_3}{\mu^3_3} = \frac{(0\,66577)^3}{2\,0275)^3} \\
&= 0\,0531821 \\
&= \frac{\mu_4}{2} = \frac{9\,00026575}{2\,0275}
\end{aligned}$$

= 2 189442 यह आसानी से देखा जा सकता है कि यदि वितरण समित ((symmetrical) हो मानी दिन्ही भी परिमाण a के लिए मेशजों के मान (x-a)तपा (a-x) मुश्ल करने की बारवारता बराबर हो—ची मंगी विषम पूर्णों (odd moments) का मान शून्य होगा । इस कारण असमीमित को भापने के लिए μ_2 उपयुक्त प्रतीत होता है । परतु इसकों माए के मांगक (unit) से स्वतन्त्र करने के लिए हम इसके वर्ग को μ_2 हो सिमाजित कर देते हैं । इस प्रकार असमीमिति को मांग β_1 एक सच्या है जियका कोई मांगक नहीं है । जितना अधिक β_2 का मान होगा वितरण ज्वना ही जिवना करिक समान हो मान होगा वितरण ज्वना ही जिवका करासीमित होगा। । यह असमीमिति किसा प्रकार की है यह जानने के लिए

बजाए β, के इसके वर्ग मूळ को लेना अधिक उत्तम है जिसका चिह्न με की चिह्न

लिया जाय । इस वर्ग मूल को 🕫 से सूचित किया जाता है।

 $\gamma_{2} = \sqrt{\beta_{1}}$ $= \frac{\mu_{2}}{\mu_{1}^{2}} \nu_{1}^{-}$ $= \frac{2 \sqrt{3}}{2 \sqrt{3}}$

चित्र १०--असम्भित तथा समित वितरण

ऊपर के उदाहरण में आपने यह देखा ही होगा कि μ_3 का मान उन प्रेक्षणों पर अधिक निगरे करता है जो माज्य से अधिक अदि पर हो। यदि इस प्रकार के प्रेक्षणों में माज्य से बड़े प्रेक्षणों की बारबारता अधिक हो तो वितरण का रूप उस फतार का होगा जैसा जिन सख्या १० (281) में दिखाया गया है और इस ददा में μ_4 का और इसी कारज γ_4 का माण पनात्मक होता है। इसके विपरीत यदि माज्य से अधिक अतर के प्रेक्षणों में माज्य से छोटे प्रेक्षणों का बाहुत्य हो तो वितरण का रूप चित्र है (283) में दिखे हुए बारबारता चित्र की तरह होगा। इस दशा में γ_4 के मान फ्यारमक होगा। इस प्रकार γ_4 के मान के बारबारता चित्र के रूप पर काफी प्रकाश पटवा है।

काकी प्रकाश पहला है।

क कुदला का माप
$$\beta_2 = \frac{\mu_t}{\mu_2^2}$$

परापु $\mu_4 = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (x_r - \overline{x})^4$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \left[((x_r - \overline{x})^2 - \mu_2) + \mu_2 \right]^2$$

$$= \frac{1}{n} \left[\sum_{r=1}^n ((x_r - \overline{x})^2 - \mu_2)^3 + 2\mu_2 \sum_{r=1}^n ((x_r - \overline{x})^2 - \mu_2) + n\mu_2^2 \right]$$

$$= \mu^2 + \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n ((x_r - \overline{x})^2 - \mu_2)^2$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n ((x_r - \overline{x})^2 - \mu_2) = 0$$

$$\therefore \beta_2 = 1 + \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \left[\left(\frac{x_r - \overline{x}}{\sigma} \right)^2 - 1 \right]^2$$

$$= 1 + V \left(\frac{x_r - \overline{x}}{\sigma} \right)^2$$

जहाँ $V\left(\frac{x_1-x}{\sigma^*}\right)^2$ से हमारा तात्पर्य $\left(\frac{x_1-x}{\sigma^*}\right)^2$ के असरण (variance) से है

अधिक β, का मान होगा। यह देखा गया है कि जिन बटनों के लिए β, अधिक होता है उनमें बारवारता चित्र भाष्य ने पास अधिक चपटा सा होता है और जिनमें इसका मान कम होता है उसमें यह माध्य के पास शिखर का सा रूप लिए होता है। प्रसामान्य बटन (normal distribution) में--जिसका वर्णन आगे के अन्यामा में किया जायगा-इसका मान 3 होता है। इसके बारबारता चित्र से

तुलना नरके यह अदाजा लगाया जा सक्ता है कि एक विशिष्ट क्षूपदता वाले धटन का रूप माध्य के पास बया होगा। β, की इस प्रकार की व्याख्या वास्तव में युनित-पूर्ण नहीं है, फिर भी सास्त्रिकी के साहित्य में इसका एक विशिष्ट स्थान है।



प्राचिकता

६ ३ १ वे स्थितियाँ जिनमें प्रायिकता का प्रयोग किया जाता है

पहिले अध्याय में कुछ ऐसी स्थितियों का वर्षन किया गया था जिनमें निश्चय पूर्वक किसी घटना की भविष्यवाणी करना समय नहीं है। यह वहा गया था कि ऐसी स्थितियों में वाश्यिकीय नियमों का उपयोग किया जाता है। ये अधिकत्तर प्राधिकता के रूप में होते हैं। इस अध्याय में हम प्राधिकता से परिचय प्राप्त करेंगे।

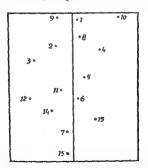
उन सब स्थितियो में जहाँ प्रामिकता का प्रयोग किया जाता है एक विद्येपता पायी जाती है। आवश्यक है कि हम इस विशेषता की ध्यान मे रखें, उदाहरणार्थ जए के खेलों में, इस्योरेंस की समस्याओं में तथा पानी के बरमने में। हम देखते हैं कि में सब भटनाएँ बार-बार भटने वाली है। पाँसे का फेंकना एक ऐसी बटना है जो कम में कम कल्पना में तो अनगिनत बार दहरायी जा सक्ती है, यदि हम इस समय इस मभादना की उपेक्षा करें कि पांता घिस अववा टूट जायगा। यदि हम इश्योरेंन की किसी एक लाक्षणिक समस्या को सुलझाने में लगे हैं तो हम कल्पना कर सक्ते हैं कि लाखी मनुष्य एक ही प्रकार का इश्योरेंस करवायेंगे और इन मनुष्या से संबंधित समान घटनाओं को इक्योरेंस कृम्पनी के रजिस्टरों में बीट कर खिया जायगा। पानी बरसने के सबध में हम अनगिनत दिनों की कल्पना कर सकते हैं जो गजर चके हैं अथवा भेविष्य में आनेवाले हैं। किन्तु हर एक दिन विसी विशेष स्थान पर वितनी वर्षा हुँई होगी, यही वह घटना है जिसमें हमें रुचि है। सामूहिक पटनाओं का-जो प्रायिकता के प्रयोग के लिए उपयुक्त है—एक अच्छा उदाहरण है कुछ गुणो की वशानुत्रमिता । किसी विशेष जाति के पौषो को ही व्येजिए जो प्रारम में एक ही बीज से उत्पन्न हुए हो और उनके फुळो का रग निरीक्षण करिए । यहाँ हम आसानी से समक्ष सकते हैं कि बारबार घटित होने वाली घटनाएँ नवा है । विश्लेष रूप से एक पीचे का लगाना और उसके फूलो के रंगी का निरीक्षण करना केवल वही एक घटना है।

इमने परवान् हम इस प्रकार की हजारा घटनाआ का केवल फूका के रंग के दृष्टिकोण से विस्टेयण करते हैं।

पाँसे फेंक्ने में ब्रारम्भिक घटना पाँसे को एक बार फेंक्ना और जितने बिद्र ऊपर ने पार्व पर आयें उन्हें नोट नार लेना है। हैड और टेल के खेल में रुपये की प्रत्येव टॉन या उछाल एक घटना है और को मुख ऊपर की ओर आये वहीं इस घटना का गुण (attribute) है। जीवन के बीमे में किसी एक व्यक्ति का जीवन एक घटना है और जिस गुत का निरोक्षण किया जाना है वह है उस व्यक्ति की मृत्यु के समय को उम्र अयवा वह उन्न जिस पर वीमा क्यनी को उस मनुष्य अयवा उसके घर बाला को रुपया देना पडता है। जब हम एक मनुष्य की एक विदीप समय-जतराल के अदर मरने की प्रायिकता के बारे में बात करते हैं तो इसका एक विशेष अब हाता है। हमें किमी व्यक्ति विशेष मही बरन् व्यक्तिया के एक पूरे समुदाय के बारे में विचार करना होता है। उदाहरण के लिए यह समुदाय उन सब व्यक्तिया का हो सबता है जिनकी उद्ध पचास वप की हो और जिल्हाने जीवन का वीमा करा दला हो । प्रापि-कता की जो परिभाषा हम देंगे वह एक समूह में एक गुण के पाये जाने की बारबारता से ही सर्वधित है। यदि आप यह नहते हैं कि वरकत उत्लाह के एक वर्ष के अन्दर ही मर कार्वे की प्रापित्रता पचास प्रतिशत है तो इसका अर्थ नेवरू यह है कि धरकत--इल्लाह एक ऐसे समुदाय का सदस्य है जिसमें से प्रवास प्रतिकास स्पृष्टित एक वर्ष के अदर ही मर जायों। यह ध्यान में रखने की बात है कि यह वक्तव्य वरकत उरलाह सं कम और उस समदाय से अधिक सविषत है जिसका अस्वत उल्लाह एक सदस्य है।

§ ३२ आपेक्षिक बारवारता का सीमान्त मान

नि अनजी गोली दाहिने भाग में पड़ेगी अयवा बाय भाग में ? प्रत्यक्ष है कि इस प्रचार को कोई भविष्य चाजी ब रता समय नहीं है। इस अनियमितता वे होते हुए भी इस प्रयोग के फनो में कुछ नियम है। बदि विचाही अच्छा नियमता वे होते हुए भी इस प्रयोग के फनो में मुख्य नियमित को बाद करीब आपे नियान वार्या और और आर क्यांचे कियान दाहिंगी और होंगे। यदि वह अच्छा नियानवाज न भी हो और यदि हम हर पोली के परने के याद यदि होंगे। यदि वह अच्छा नियानवाज न भी हो और यदि हम हर पोली के परने के याद यदि होंगे। अहे वह अच्छा नियानवाज न भी हो और अवस्था नवती जाती है बेने की स्वयं का अनुवाद निकाल हो हम देवाँग कि जैसे कुछ सुक्या वहनी जाती है बेने विदेश स्वयं का अवस्था हम हम स्वयं की स्वयं की स्वयं का स्वयं की स्वयं स्वयं हमें के स्वयं अर्थ हमें की स्वयं स्वयं स्वयं की स्वयं स्वयं



चिन , ११ — ऊरने रेला पर निजाना बोवकर बळाती हुई गोलियों का बितरण मान कीनिय कि आप इस आपेशिक गोरतारता का परिकाल एक विशेष समान्य रामा तक करते हैं। यदि यह परिकाल पहिले स्वामन्य स्थान सक करना हो तो ^{उद्}तिरण के किए तीस में से तम जिल्ला किया नीहिंग और पढ़ने पर यह आपेशिक बार-

हम लोग प्रायिकता के सिद्धान्तों में केवल उन बार-बार पटनेवाली घटनाओं ने समुदायों का अध्ययन करेंगे जिनमें ग्रह विदवास करने के काफी कारण हो कि आपर-श्विक बारवारता एक विषेष सख्या को और प्रवृत्त होंगी है। इस सख्या को आपेशिक बारवारता की नीमा (lumt) कहते हैं। यह सीमा ही समुदाय में उस गुण के पाने जाने की प्रायिकता (probability) कहलाती है जिसकी आपेशिक बारवारता का परिकलन हम कर रहे थे।

६३३ एक अन्य परिभाषा

इस प्राधिकता शब्द की एक और परिभाषा है जो नीचे लिखे उदाहरणों हारा स्पष्ट हो जायेगी।

(१) डिब्बा और गोलियाँ—एक डिब्बे में p गोलियां है जिनमें p, सफैद है और बाकी अन्य दूसरे रागे की । हम एक मौली को बिता देखे ही डिब्बे में से निकालते हैं, उसके राग की मीट करते हैं और फिर उसे डिब्बे में से निकालते हैं, उसके राग के मीट करते हैं और फिर उसे डिब्बे में से निकालते हैं, उसके राग के सकते हो। यह प्रमोग हम बार-दार करते हैं और अमियनत बार फर सकते हैं। इन प्रमोग में सफेद गोलियों को आपिक्षिक सारवारता जिस सीमा को और प्रमृत्त हो रही है उसे (अपर दी हुई परि-भाषा के अनुसार) हम सफेद गोली के मूले बाते की प्रतिकत्ता सहेंसे। पराह प्रदेश के अलावा गोलियों बात बढ़ और वनके में सामात हो और गोलियों को हर प्रयोग के सबाद अली मीति सिक्त दिया जाने दी यह इसामिक जान परेमा कि किसी मी गोली के सुने जाने की प्रायिकता जतनो हो है जिसने किस भाग के सामात है।

भोरिया है जितमें से n, गोलियां सकेद है, इसलिए सफेद गोली के जूने चाने की प्राप्त-नना में है । जब प्राप्तिकता की परिवासा यह भी मानी जा सकती है कि

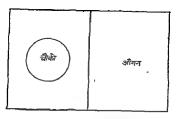
मायितता = चिभिन्न एकनी पटनाजाकी सस्या समस्त विभिन्न घटनाजो की शरया

यहीं पर ऐसी पटनाजा पर विचार निया जा उद्धा है जिनकी प्राधिकताएँ राहन तान दारा (intuitively) समान मानी जा सकती है। यह आपने देखा होगा कि हम परिमापा में प्राधिकता का कुछ जान पहिंद्र के लिहित है। इस बाराज परिमार हम परिमापा में प्राधिकता का कुछ जान पहिंद्र के लिहित है। इस बाराज परिमार हम परिमार के एम में प्राधिकता कराजर हो जो यह पूर केवल नियी (elementary events) की प्राधिकता कराजर हो जो यह पूर केवल नियी में पुत्र पटनाकी प्राधिकता का कराज कराजर हो जो यह पूर केवल नियी में पुत्र पटनाकी प्राधिकता का कराज कराजर है और खड़ प्राथिक पटनाओं की प्राधिकताओं का बराजर माने लेना विचार-स्थान नाकुम होंग है। किन्तु सकेद मोनी का पुनाय एक ब्युक्त घटना (joint event) है जो उन प्राधिक पटनाओं के हमीन से बनी है जिनमें विनिध्य सफेद बीलियों का पुनाव होता है। हिं।

मह भी रूपन्ट हो है कि प्रेक्षण हारा प्राविष्यता का पता कमाना असमय है, बमीकि इसके लिए वसक्य प्रयोग करने पहेंगे। अगवे अध्याम में हम देखेंगे कि प्राविष्यता किस विद्याल के लागा एप निश्चित्र की जाती है। प्रेक्षण हारा हमें यह माकूम हो सकता है कि यह तिरास्त प्राविकता समय है या नहीं। ऐसी परिस्थितियों में नहीं प्राविक्त सम्याल हो सकता है कि यह तिरास्त प्राविक्ता समय है या नहीं। ऐसी परिस्थितियों में नहीं प्राविक्त में अपनी करना अनावस्थक भीत होता है।

(२) वर्षा--मान लीजिए, आप एक छोटे-से आंगन में लडे है। उसमें एक चौको गमें है। बोडी देर में हरूकी हरूकी कुछारे पड़ने रूनती हैं। इसनी हरूकी कि आप हर बूँद को -- की आंगन में गिरती है-- पिन सक्ते हैं और गह भी देख सकते हैं कि वह पीको पर गिरी या नहीं। स्वासा बूँदो के गिरने के बाद आप उस प्रामिकता का किसी एर तक अनुगत रूगा सक्तें को कि किसो बूँद के बीकी पर गिरने की है। यह अनुगत अप चौको पर गिरी हुई बूँदो की अपिक का स्वारता के आधार पर स्नामिंग वर्षा वर्षा वीरों से पर रही है तो बेंदों का गिनमा असमय है।

यदि आप आँमन को उसकी युजाओं से समानातर रेखाओ द्वारा छोटे छोटे किंतु बराबर क्षेत्रफलकाले नगीं (squares) में विभाजित कर दें तो अपर के उदा-



चित्र १२-—चौकी पर वर्षा-बिस्टुओ की प्राधिकता वित्रीभी यह विचार सगत मालम होता है कि प्रश्लेक को में बंड के

हरण की भौति यहाँ भी यह विचार सगत मालूम होता है कि प्रश्येक वर्ग में धूँद के पड़ने की प्रायिकता बरावर है।

ं बूँद के चौकी पर पड़ने की प्राधिकता

उन वर्गों की शस्या जो घौकी में है कुछ वर्गों की सस्या जो पूरे झांगन में है

परतु कुछ वसं ऐसे भी है जो अधत जीकी पर और अशत उसके बाहर है। यदि इन वपों भी सच्या उन वपों भी करोशा बहुत कम है जो चौकी में है दो प्रायिकता है कलम में उपर के सूत्र के प्रयोग से कोई विजेप अदर नहीं पड़ेया। मान ओजिए पूरे बौगन में पौच करोड वपों है जिनमें से एक करोड जीकी पर पूर्णत्या और एक सहस्र असव पर्वे हैं। इस समा में हम कह सबते हैं कि यदि बूँद के चौकी पर पड़ने की प्रायिकता कारवा में है में हम कह सबते हैं कि यदि बूँद के चौकी पर पड़ने की प्रायिकता कारवा में हम है हो)

$$p < \frac{10,000,000+1,000}{50,000,000} = +\frac{1}{5} + \frac{1}{50,000}$$

$$\sqrt[80]{t} p > \frac{10,000,000}{50,000,000} = \frac{1}{5}$$

('क'>'फ' के वर्ष होते हैं कि 'फ' से 'क' बड़ा है। इसी प्रकार 'क'<'ख' के वर्ष होते हैं कि 'स' से 'क' छोटा है।)

इस प्रकार हमने बूँदों के चौनी पर पड़ने की प्राधिकता नी दो सीमाएँ निश्चित कर की और हम यह नह सुबते हैं कि प्राधिकता दन दोनो सीमाओं के बीच की कोई सब्या है। यदि हम अधिनाधिक छोटे वर्ग नेते चन्ने जायें सो ये सीमाएँ भी पाव आतीं जायेंगी। सीमान्त में दोनो बरावर हो जायेंगी। भीमान्त में चीकी पर स्थित क्यों की सब्या का कुछ वर्गों की सब्या से अनुपात चीकी और आंगत के क्षेत्रफल के क्युगत के बरावर होता है। इस प्रवास—

बूर के चौकी पर गिरले की प्राधिकता = चौकी का क्षेत्रफल आगन का क्षेत्रफल

किसी भी मोसम विकान विकास (meteorological station) में वर्षा को नायने के रिप्ए को वृद्धि-सायक (rain-gauge) लगाया जाता है उसमें इस ऊपर लिखे सिकार का प्रयोग विचा जाता है। उक वृद्धि सायक में जितना पानी पडता है जैसे सहर में पड़े हुए पानी का प्रतिकृषित मानने में यहाँ तर्ज है।

९ ३ ४ प्रतिवधी प्राधिकता

×

ितनी घटना अथवा गुण को आविषता के लिए यह भी आवश्यक है लि हम यह जानें कि वह फिल अबोग से स्वाधित है। उदाहरणार्य, अपर हम चीकी पर दूरे हिगरते की गायिकता का परिकलन वर रहे थे। इसमें प्रशीन वा जन चूँचे ना निर्देशका जो औगन में गिर रही हैं। विद जीनन ने जीज में एक रेखा खीची हुई हो और हम केरक जन दूँदों का निरोक्षण वर्ष जो रेखा के उस ओर बाल आग में गिर रही है जिसमें चीकी है तो बूद के चीकी पर शिगले की प्राधिकता बदल जायेगी। वास्तव में हमें यह महना जाहिए कि उन नूदों के लिए जो दूरे आंतन में गिर रही हैं चीकी पर विरन्दे की प्राधिकता चीकी और अंतन के लेक्स को के अनुपात के वरावार है।

स्नी प्रकार बिंद हुम रुपया उछारुत है और देखते है कि वह चित गिरता है या गर तो एक अच्छे डिकके के डिप्प चित गिरते की प्राधिकता है है। इस प्रयोग में समस्त उन्होंपणी (tosses) के परिणासो ना निरोक्षण निया जाता है। प्रयोग को वदल कर सह प्रविवय लगाया वा सकता है कि हम वेवल उन उन्होंपणो पर विचार करेंगे जिनके पूर्वमामी उन्होंपण का परिणाम पट हो। मान लीजिए कि प्रथम सौल्ह उन्हों-पणो के परिणाम निम्नालिखित है—

9 10 11 12 13 14 15 16 प चि प प चि य चि प

इसमें हम केवल भोगे, छठे, सावमें, आठमें, वसमें, वारहमें, तेरहमें, तथा पहहूनें उरलेपणों पर आपेक्षिक बारबारता के परिचलन के लिए विचार करेंगे, वभोकि में ही उरलेपण पर पहने के पहचान के हैं। इस प्रकार की आपेक्षिक वारवारता की प्रति-वैची आपेक्षिक आरंबारता (condutional relative firquency) कहते हैं। इस सिगेप उदाहरण में हम यह कहुँगे कि यह विवे हुए होने पर कि पिछले उरलेपण का परिणास पट या जित एडने की अपिवची आपेक्षिक बारबारता है।

इत प्रकार की प्रतिवधी आपेक्षिक वारवारता की शीमा को प्रतिवधी प्राधिकता कहते हैं।

६ ३ ५ स्वतंत्र घटनाएँ

मान लीजिए कि A और B दो घटनाए है। यदि A की प्रायिकता बिना निसी प्रतिबच के उतनी ही ही जितनी इस प्रतिबच के साथ कि B उसमे पहिले घटित हो चुकी है, तो हम कहते हैं कि घटना A घटना B से स्वतंत्र है।

आगे से हम क्सि घटना Λ की अधिकवहीन प्रायक्ता को P (A) इररा मुक्ति करेंगे। इसी प्रकार A की अधिकवी आयिकता को—यह दिया होने पर कि B घटित हो चुकी है −P(A/B) डारा सुचित किया जायगा और इसे प्रायक्ता A दत्त B'

पढा जाता है। इस सकेत (notation) के अनुसार A घटना B से स्वतंत्र कहलायेगी यदि

$P(A/B) \approx P(A)$

६ इः६ घटनाओं का संगम और प्रतिच्छेद (Intersection)

किसी एक ही प्रयोग के परिणाम स्वरूप कई भिन्न भिन्न घटनाएँ हो सकती है। इन्हें हम प्राथमिन घटनाएँ (elementary events) वह सकते हैं। कुछ और घटनाएँ ऐसी होती हैं जो इन्में से कुछ विशेष प्राथमिक घटनाओं का कुछन (set) होती हैं। उसाहरण के किए एक पति फेंकने से 1, 2, 3, 4, 5 अपयो कि विद्व कर सा सकते हैं। इस प्रकार यह छ तो प्राथमिक घटनाएँ हैं। किन्तु केवल 1, 3 या 5 में से किसी भी एक मुख्या का तकते हैं। इस प्रकार यह छ तो प्राथमिक घटनाएँ हैं। किन्तु केवल 1, 3 या 5 में से किसी भी एक मुख्या का उकर जाता इस प्रकार की घटनाओं का एक कुछल है। प्राथमिक घटनाओं का साथ में इस प्रकार की घटनाओं का पर कुछल है।

(union) कहते हैं। यदि A और B दो घटनाएँ हो तो हम इनके समम का सावेतिक निरूपम AUB के द्वारा करते हैं और इसे 'A सगम B' पढते हैं। इसका दाव्टिक अर्थ है A या B में से कम से कम एक घटना का घटित होना।

एक और प्रकार की घटना A और II से मवधित हो सकती है। यह है A और B दोनों का एक माथ पटित होता। मान की बिए कि एक रुपये को दो बार उछाछा जाता है। घटना A पहिले उस्सोपन में रुपये का चित्र पड़ना है और घटना B है दूसरे उस्सेपन में चित्र पड़ना है और घटना B है दूसरे उस्सेपन में चित्र पड़ना है यदि दोनों उस्सेपनों में रुपयों चित्र आये तो A भी घटित होंगी और B भी। इस प्रकार में घटनाओं A और B के एक साथ घटित होंने को हम A और B का प्रतिच्छेद कहते हैं। इसपों A A D डि इस्स सूचित करते हैं, और इसे 'A मिल्छेद B' पढ़ते हैं।

§ ३'७ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (Mutually Exclusive Events)

हुन्छ घटनाएँ ऐसी होती हैं जो साथ-साथ हो ही नहीं सकती। जैसे गाँसा केवने पर १ और २ दोनो साथ साथ उत्परनहीं जा सकते। इस प्रकारकी घटनाओं को परस्पर अपकर्षी घटनाएँ वहते हैं। यदि A और B दो परस्पर अपवर्षी घटनाएँ हैं तो A A B एक ऐसी घटना है जो हो ही नहीं सकती। ऐसी असमब घटनाओं को हम O डारा चूजित कर सकते हैं।

इस प्रकार यदि हम लिखें कि---

A ∩ B=0 तो इसका अर्थ यह होगा कि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

§ ३.८ घटनाओ का वियोग

मान कीजिए प्रयोग पासे को फेकने का है और A तथा B निम्नलिखित घटनाएँ हैं।

..५०। A: 1, 2 या 3 बिंदुओ में से किसी एक काऊ पर आना

B: 2, 4 या 6 विदुषों में से किसी एक का ऊपर आना इस दशा में A और B का सभम निम्नलिखित है।

AUB: 1,2,3,4 या6 बिंदुओं का कपर आना≀ इसी प्रकार A और B का गुणनफल निम्नलिखित है

AΩB: 2 बिन्दुओं का ऊपर आना।

यदि \mathbf{I} अवना \mathbf{J} निंदु ऊगर आगें तो \mathbf{A} पटित होगी परेतु \mathbf{B} नहीं। इस प्रकार की घटना को हम \mathbf{A} - \mathbf{B} से सूचित करते हैं और इसे " \mathbf{A} वियोग \mathbf{B} " पढ़ते हैं,। इसी प्रकार पदि \mathbf{B} घटित हो और \mathbf{A} नहीं तो इसको \mathbf{B} - \mathbf{A} से सूचित करते हैं। ऊगर की घटनाओं के लिए

A-B: 1 अथवा 3 विद्यो का उपर आवा

B-A 4 अयवा 6 बिंदुओ का ऊपर आना

६ ३'९ घटनाओं का गणित होना

मान लीजिए ऊपर के प्रयोग में एक घटना Cहै।

C· I अयवा 3 विदुओं में से किसी एक का ऊपर आता।

यह स्पन्ट है कि यदि C घटित होगी तो A भी घटित होगी। इसकी हम सकेत द्वारा निम्मलिखित तरीके से सचित करते हैं

CCA

शब्दों द्वारा हम यह कह सकते हैं कि 'घटना C घटना A में गींवत है'। आप यह आसानी से देख सकते हैं कि—

(A∩B) CA

(A∩B) ⊂B(3.2)

 $(A - B) \subset A$ $(B - A) \subset B$

यदि कोई घटना \mathbf{C} भटना \mathbf{A} में यभित नहीं हो तो इस गुण को सकेत द्वारा हम निम्निक्तिस रीति से सचित कर सकते हैं :

C & A

§ ३ १० आपेक्षिक बारंबारता के कुछ गुण

एक दात शायद आपके व्यान में आयी होगी। वह यह कि जहां भी हम पटनाओं के अनत अनुक्रम (infinite sequence) अवना बारवारता के सीमान्त मानो का वर्णन करते हैं वहां हम केवल विचारों की चुनिया में विचरण कर रहे हैं। धारत्य में किसी भी मनुष्य की घटनाओं के अनत अनुक्रम का निरोक्षण नहीं करता होता और बारवारतालों के सीमान भागों का कोई भौतिक अस्तित्व नहीं है। तथा क्यांवित् सीचते होंगे कि इम प्रकार की घारणा का व्यावहारिक जीनन में क्या उपयोग हो सकता है। परतु प्रभोजित गाणित (applied mathematics) इस प्रनार की धारणाओं से भरा हुआ है। उदाहरण के लिए गित-विज्ञान (dynamics) में निसी एक चितु पर नेग (velocity) अपना निसी एक चितु पर तगर (deceleration) इस प्रकार को धारणाई है जिनना भौतिक करिसाद नहीं है और न जनना श्रेक्त करण किया कहता है। धारणाई है जिनना भौतिक करिसाद नहीं है और न जनना श्रेक्त करण किया कहता है। धारणाई को आधार स्वरूप के कर भौगाल मान ही है। परतु हम जानते हैं कि इन्हीं धारणाओं को आधार स्वरूप लेकर को गीतिविज्ञान निर्मित हुआ है उसका उपयोग इजीनियर लोग करते हैं। घषणि इनका अपना अस्तित्व नहीं है, परतु ये कुछ ऐसे गुणा का आदर्शकरण (idealisation) है जो वास्तिविक है। इसी प्रकार यद्योप प्राधिक भौतिक भौतित्व को है परतु ये वह अस्ति अस्ति है। इसी प्रकार यद्योप प्राधिक कार्यार्थिक वार्यार्थारातों से गार्बिपत है जिसके भौतिक भरित्व को है। एसी प्रकार है जिस को परित्य माण्य कर, बनी कि

काइए, अब हुम आपाक्षक बारदारताओं के कुछ गुणा से पारक्य भाष्त कर, क्याकि जिस प्रायिकता का हुमें अध्ययन करना है उसमें भी ये गुण अवस्य ही विद्यमान रहेगे।

(१) यदि n प्रयोगों में किसी घटना की वारवारता ν हो तो $\frac{\nu}{n}$ इस घटना की कार्यक्षिक बारवारता हुई। यह स्थट है कि ν न तो बूत्य से कम कोई ऋणारमक सक्या हो सकती है और n यह n से अधिक ही हो सकता है। इस यतरण आपेक्षिक बारवारता न तो मूजारमक सक्या हो सकती है और n १ से अधिक कोई धनारमक एक्या। आपेक्षिक बारवारताओं के इस गुण को सूत्र में हम लिख सकते है

$$0 \leqslant \frac{\nu}{n} \leqslant 1 \qquad \dots (3 3)$$

(२) यदि कोई घटना असमय हो तो बारबारता ४ यून्य होगी। इस कारण क्तमय घटनाओं की आपेक्षित बारबारता भी शून्य होगी।

(३) यदि किसी घटना का प्रयोग के साथ होना अनिवाय हो तो प्र=ा होगा गमा इस दशा में पटना की आपेक्षिक बारबारता १ होगी।

आगे से हम किसी विश्लेष घटना Aकी बारबारताको v (A) द्वारा मूचिन करेंगे।

(Y) यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हो जिनकी आपेक्षिक बारवार-ताएँ कहा ν (A) और ν (B) हो तो इन होनो घटनाओं के समम AUB की अपेक्षिक बारवारता ν $(A)+\nu$ (B) होगी। इस गृण को हम निम्नलिखित सूज इसस सुचित कर सकते हैं

यदि An B=o हो तो,

 $\nu(AUB) = \nu(A) + \nu(B) \qquad (3.4)$

(4) यदि v (AB) B के घट चुकने पर A की प्रतिवधी-आपेक्षिक बारवारता को सूचित करता है तो

$$\nu(A B) = \frac{\nu(A \cap B)}{\nu(B)}$$
 (3 5)

न्योंकि भान स्त्रीजिए कि B नी बारबारता ν_{z} , AUB की बारबारता ν_{z} , ब्रीर कुरू बारबारता π है।

तो
$$\nu(B) = \frac{\nu_2}{n}$$

$$\nu(A \cap B) = \frac{\nu}{n}$$
तथा $\nu(A \mid B) = \frac{\nu'}{\nu}$

$$= \frac{\nu'}{n} \int_{n}^{\nu_B}$$

$$= \frac{\nu(A \cap B)}{\nu(B)}$$

६३११ प्रायिकता के गुण

बयों कि प्रायिकता आपेक्षिक बार बार ता का सीमान्त मान है, इसलिए उसके गणी और आपेक्षिक बार बारता के ऊपर छिले गुणी में समानता होनी आवस्पक है। यही नहीं प्रायिकता की एक परिभाषा जो आजकल सबसे अधिक मान्य है निम्निलिखत है

मानिकता याद्विकत प्रयोगो (random experiments) के परिणामा से सर्वाधित एक माप है जिसके निश्वकित्वत गण है—

(r) यदि A एक असमन घटना है तो P(A)=0

(2) यदि A एक अनिवार्य घटना है तो P(A)=1

(r, 2) P एक माप है जिसका निम्नतम मान सून्य और महतम मान r है अथवा

o≤P(A)≤ 1 (36)

(3) बदि A और B दो परस्पर अपनर्शी घटनाएँ हो तो P(AUB)=P(A)+P(B)

(3 7)

(3') इसी प्रवार यदि $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_n$ बुल ॥परस्पर अपवर्जी भग्नाएँ हो तो

$$P \underset{i=1}{\overset{n}{\cup}} A_i) = P(A_1 U A_2 U A_3 U \qquad U A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A)$$
(3.8)

(3') यदि A_1 , A_2 इत्यादि अनिगतत अपवर्जी घटनाएँ हा तो इनके ∞ सगर को $\mathbf{U}A_1$ से सूचित किया जा सकता है और

 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (3.9)

्राच्य ं ्राच्य ` ्राच्य ` ्राच्य त्राच्य त्राच्य त्राच्य त्र Λ को प्रतिवयी प्राप्य किता का निष्णे क्षेत्र द्वारा परिचलन विद्या जा सकता है

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
 (3 10)

(4) गुणत का नियम यदि A₁ A₂ क्ल

 $\begin{array}{lll} \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_4 \cap A_3 \cap & \cap A_n\right) = \mathbb{P}(A_1 | A_4 \cap A_0 \cap & \cap A_n) & \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_n) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_1 \cap & A_n) = \mathbb{P}(A_2 | A_3 \cap A_4 \cap & \cap A_n) \mathbb{P}(A_3 \cap A_4 \cap & \cap A_n) \\ \mathbb{P}(A_3 \cap A_4 \cap & \cap A_n) = \mathbb{P}(A_3 | A_4 \cap A_4 \cap & \cap A_n) & \mathbb{P}\left(A_4 \cap A_4 \cap & \cap A_n\right) \\ \end{array}$

 $\begin{array}{l} P(A_n \perp \cap A_n) = P(A_n \perp | A_n) P(A_n) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap \cap A_n) = P(A_n) P(A_n \perp | A_n) P(A_n \perp | A_n \perp \cap A_n) \\ P(A_1 \mid A_2 \cap A_3 \cap \cap \cap A_n) \end{array} \tag{3 II}$

 (5) यदि A और B दो स्वतन घटनाएँ हो तो परिभाषा के अनुसार P(A/B)==P(A)

परतुचौये मुण के अनुसार

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
 Eason $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (3 12)

(5') इसी प्रकार यदि A_1 , A_2 , A_n परस्पर स्वतत्र घटनाएँ हो तो $P(A_1 \cap A_2 \cap \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)$. $P(A_n)$ (3.13)

आइए, अब हम ऊपर दी हुई घारणाओं से अधिक परिचित्त होने के लिए प्रायिकता को कुछ प्रहेलियाओं को हरु करें।

30 Martin of Garage

महेत्विकाएँ

(१) पुढ़दीड़ में दांव कमाने की आम प्रया है। एक प्रकार की घुड़दीड़ में सात मोड़े रीड़ते हैं और यदि आप उनने कम की ठीक-ठीक भविष्यवाणी कर दें तो आएको एक सहत कपसे का काम होता है। यदि आप पोड़ों के बारे में जुछ नहीं जानते और केवळ अनुमान के आधार पर भविष्यवाणी करते हैं तो क्या प्रायिकता है कि आको यह सहस्र करायी की प्राप्ति हो जायेंगी?

यदि हम सात भिन्न भिन्न वस्तुओं के कुल कमचयो ((pemutations)) की सख्या को २ ! से संचित करें तो प्रायिकता का कलन निम्नलिखन विधि से हो सकता है

(31) के अनुसार

प्राधिकता ममस्त विभिन्न प्रदेशको की संस्था ममस्त विभिन्न प्रदेशको की संस्था

जन कमचयो की मस्या जिनके चुनाव पर आपको लाभ होगा कुल कमचयो की सर्या

1

 $=\frac{1}{7!}$

यदि A, B, C और D चार विभिन्न वस्तुएँ है तो उनको निम्नलिखित कमो में

संजाया जा सकता है।

(1) ABCD (7) BACD (13) CABD (19) DABC (2) ABDC (8) BADC (14) CADB (20) DACB

(2) ABDC (8) BADC (14) CADB (20) DACB (1) ACBD (0) BCDA (15) CBAD (21) DBAC

(3) ACBD (9) BCDA (15) CBAD (21) DBAC (4) ACDB (10) BCAD (16) CBDA (22) DBCA

(4) ACDB (10) BCAD (10) CDAB (23) DCAB

(6) ADCB (12) BDGA (18) CDBA (24) DCBA जिम प्रकार अगर के उदाहरण में सात वस्तुओं के कुल कमचयों की संस्था को 7 से

जिस प्रकार ऊपर के उदाहरण में सात बस्तुओं के कुल कमचयों को सस्या का 7' र सूचित किया था, उसी प्रकार हम चार वस्तुओं के कुल कमचयों की सस्या को 4' से सूचित करते हैं। यहाँ हम देख ही चुके हैं कि

इसी प्रकार यदि n विभिन्न वस्तुओं के कमचयों की सख्या को n ! से सूचित किया जाय तो यह सिद्ध किया जा मकता है कि

$$n^1 = n \times (n-1) \times (n-2) \times \times 3 \times 2 \times 1$$
 (3 14)

इस प्रकार ऊपर के उदाहरण में

प्राधिकताः
$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= \frac{1}{5.040}$$

इसके अयं यह हुए कि यदि इस प्रकार की चुडदौडों में आप बारवार रूम के मंत्रण में भितप्ताणी करें तो जीसतन 5040 मिलप्यवाणियों में से एक टीक होगी। यह बात आपने नोट की होगी कि इस मिलप्रवाणी के प्रयोग में प्रत्येक कम्मय एक समय प्राविक्त पटना है। ये सब प्राविक्त कटनाएँ परस्पर अपवर्गी है और हमने यह मान किया है कि इस समय प्रविक्त करान पर साम है। यह करपना मान किया है कि इस सब कम्मयों की चुने जाने की प्रायिक्ता समान है। यह करपना इस स्थान पर उचित हो मित होती है।

(२) एक कारखाने में बिजलों है बद्ध बनते हैं जिनमें बीसतन सी में से पीच खराब निकल जाते हैं। यदि दिन भर के उत्पादन में जो लाखों बदब है जनमें से हम यादृष्टिक विधि से 4 बद्ध चुन लेते हैं ती इन चुने हुए बद्धा में से 3 के खराब होने की क्या प्राधिकता है?

हम किसी ऐसे कमजय के जुनने की प्रायिकता का विचार करें जिसमें 3 वस्य खराब हो। यदि हम अच्छे वस्यों को A से और बुरे बस्यों को B से सूचित करें तो एक कमजय निम्मालिखित हो सकता है।

ऐसे कमचय को चुनने की प्रायिकता

ввва

= P[पहिले बल्ब का बुरा होना Ω दूसरे बल्ब का बुरा होना Ω तीसरे बल्ब का बुरा होना Ω चौब बल्ब का अच्छा होना]

=(पहिले बल्ब के बुरे होने की प्रायिकता)×

(दूसरे बल्ब के बुरे होने की प्रायिकता) ×

(तीसरे बल्व के बुरे होने की प्रायिकता) ×

(चौथे बल्ब के अच्छे होने की प्राधिकता)
=
$$\frac{5}{100} \times \frac{5}{100} \times \frac{5}{100} \times \frac{95}{100}$$

यह परिकलन इस शरपना के आधार पर किया गया है कि यह सबुन्त मटना जिन चार घटनाओं का गुणनफल है वे स्वतंत्र है। यहाँ समीकरण (3 13) का जनयोग किया गया है।

इस प्रकार हम देखेंगें कि तीन बुरे और एक अच्छे बल्ब के जितने भी कमचय

हैं उनकी प्राधिकता 19 है। ऐसे कुछ कमचय चार है।

(1) BBBA (2) BBAB (3) BABB (4) ABBB
यह चारो परस्पर अपवर्शी चटनाएँ है। इसकिए इसकी प्राधिकता कि इनमें
से कोई भी एक घटित हो जाय समीकरण (38) के अनुसार

P[(BBBA)U(BBAB)U(BABB)U(ABBB)] =P(BBBA)+P(BBAB)+P(BABB)+P(ABBB)

$$=\frac{19}{160\,000} + \frac{19}{160\,000} + \frac{19}{160\,000} + \frac{19}{160\,000}$$

$$=\frac{76}{160\,000} = \frac{19}{40\,000}$$

यदि कुछ N वस्तुएँ हो जिनमें से rएक प्रकार की और (N-r) दूसरे प्रचार की हो तो समस्त क्रमचयों की संस्था को—जो एक दूसरे से भिन्न हो— $\binom{N}{r}$ से सूचित किया जाता है। इस सकेत का प्रयोग हम पिछने अध्याय में कर चुके है। उत्तर के खड़ाहरण में N-a

.. कुल विभिन्न कमचयो की सप्या 😑 🕻

यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\binom{r}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!}$$

(3 15)

ण्डाहरण के लिए यदि चार बल्बो में से दो बुरे और दो अच्छे हो तो कुल श्रमवयो की सत्या

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1}$$

$$= 6$$

ये गिन कर भी देखे जा सकते हैं

(i) AABB

(a) BBAA

(2) ABAB (5) BABA

(3) ABBA (6) BAAB

ऐसे कमचयों को जिनमें एक ही प्रपार की विभिन्न बस्तुओं में भेद नहीं विध्या जाना, सचय (Combination) कहते हैं।

(३) जमर के ही जदाहरण में इस घटना की क्या प्रायिकता है कि चुने हुए चारकतों में से कम से कम एक पत्न अच्छा हो ?

यहाँ दो धरस्पर अपवर्जी घटनाएँ है

(क) कम से कम एक बल्ब अच्छा हो।

(ख) चारो बल्ज खराब हों।

इसके अतिरिक्त और कोई पटना समय नहीं है। अयाँन् इन दोनों में से एक घटना का होना निश्चित है।

प्रापिकता के दूसरे गुण के कारण

∴ P[(कमसे कम एक बत्ब अच्छा हो) U (चारो बस्व खराव हो)]

परतु इस समीकरण में वायी और का भाग

≔P [कम से कम एक बस्य अच्छा हो]

-P [चारो बल्ब सराव हो]

∴P [कम से कम एक बत्व जच्छा हो]

≃1--P [चारो बल्ब खराव हो]

परतु P [भारो बल्ब खराब हो] $\Longrightarrow P(BBBB)$

$$= \frac{100}{2} \times \frac{100}{2} \times \frac{100}{2} \times \frac{100}{2}$$

P [कम से कम एक बल्द अच्छा हो] $=\frac{159,999}{160,000}$

 $\{x\}$ ताझ है पता में से दो पत्ते C_2 और C_2 की वे गये I हम A से इस घटना को मूचित करेंपे कि C_2 पान का पता है और B से उस घटना को कि C_4 पान का पता है I

स्पण्टतया समीकरम (3 I) के अनुमार
$$P(A) = \frac{13}{52}$$

यदि हमें पना हो कि A घटित हो चुकी है तो C₃ वाकी के 51 पत्तों में से याद्विष्टक विधि द्वारा क्षीचा गया एक पत्ता है । इन फ्तों में केवल 12 पत्ते पान के हैं । इससिए

समीकरण (3 1) के अनुसार $P(B|A) = \frac{12}{51}$

इस बात की प्राधिकता कि दोनों पक्ष पान के हैं प्राधिकता के मुणन के नियम समीकरण (3 11) के अनुसार P(Af1B) ==P(A)P(B/A)

$$= \frac{13}{5^2} \times \frac{12}{51}$$
$$= \frac{1}{50}$$

17 8 ३ १२ बेज का प्रमेय (Bayes' Theorem)

गुणन नियम के अनसार

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$= P(B)P(A|B)$$

$$\therefore P(A/B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$
(3 16)

मान कीजिए कि Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 , Λ_4 , कुछ n परस्पर अपवर्णी घटनाएँ हैं जिनका ${f B}$ के साथ हो सकना मभव है।

$$B = (A_1 \cap B)U \quad U(A_2 \cap B)UU(A_n \cap B)$$

$$\therefore P(B) = P \left[\ddot{U}(\Lambda \nu \cap B) \right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} P(A_{\nu} \cap B)$$

यदि $P(A_{\nu})=\pi_{\nu}$ तथः $P(B|A_{\nu})=P_{\nu}$ $\nu=1$ 2 3,

सो

$$P(A_{\nu}|B) = \frac{P(A_{\nu})P(B|A_{\nu})}{P\left[\bigcup_{\nu=1}^{n}(A_{\nu}\cap B)\right]}$$

$$= \frac{P(A_{\nu})P(B|A_{\nu})}{\sum_{\nu=1}^{n}P(A_{\nu}\cap B)} = \frac{P(A_{\nu})P(B|A_{\nu})}{\sum_{\nu=1}^{n}P(A_{\nu})P(B|A_{\nu})}$$

$$= \frac{P_{\nu}-\nu}{\sum_{\nu=1}^{n}P_{\nu}}$$

$$= \frac{P_{\nu}-\nu}{\sum_{\nu=1}^{n}P_{\nu}}$$
(3.17)

यह सूत्र क्षेत्र का प्रमेय कहलाता है।

इस प्रमेय का प्रमोग बहुषा निष्निलिख अवस्था में होता है। किसी एक याद्धिक प्रमोग में हम घटना B के होने अववा न होने का निरोक्षण करते हैं। हमें पह पता है कि $\Delta_3 A_5$, A_5 कुछ ग परस्पर अपवार्ष कारण है बिन के फरन्य परना B हो सकती है। मान की जिया कि प्रमोग के पहिले हमें यह मालू मही जात है कि कारण A_s के प्रमायकारी होने की प्रायिकता क्या है। इसको A_s की प्रदोत गृहीत प्रायिकता (a-pnon probability) कहते हैं। मान की जिया कि यह पूर्वत गृहीत प्रायिकता (A_s) कि प्रमायकारी होने पर भी यह आवश्यक नहीं है कि परना A_s के प्रभावकारी होने पर भी यह आवश्यक नहीं है कि परना A_s हो। मान की जिया कि B की प्रविवर्धा प्रायिकता A_s (A_s) का प्रमायकारी होने पर भी यह आवश्यक नहीं है कि परना A_s हो। कि A_s का प्रभावकारी होने पर भी यह आवश्यक नहीं है कि परना A_s हो। कि A_s का प्रभावकारी हों हो।

बेश के प्रमेय के आधार पर हम Λ_{ν} की प्रायिकता $P(\Lambda_{\nu}|B)$ का परिकल्स कर सकते है। बतनी B के प्रवेशमा के घरणात् हम Λ_{ν} के प्रभावकारी होने की प्राधिकता मालूम कर मकते हैं। इसे Λ_{ν} की परत लब्ब प्रायिकता (a-posterior probability) कहते हैं।

सास्यिकी में इस प्रमेम के उपयोग में सबसे बटी बाधा यह है कि अधिकतर पूर्वेत गृहीत प्रायिक्ता बजात होती है। नीचे हम एक छोटा सा उदाहरण देते हैं जहाँ इस प्रमेय का युक्तियुक्त प्रयोग हो सकता है। उदाहरण—भीच बर्गन है जिनमें से हर एक में चार-चार मोलियाँ है । इन बर्तनों को पृथक् पृथक् पहिचानने के लिए हम इनका नामकरण सकार करके दन्हें A_1 , A_2 , A_3 , A_4 तदा A_5 कहेंने । इनमें दो रण की मोलियाँ है—मोली और लाल ! किस बर्तन में कितनी गोलियाँ लाल और कितनी नीली है यह चीचे दिया हुआ है ।

A₁— भारो नीली गोलियाँ
A₃— तीन गोलियाँ नीली और एक साल १

A.— दो गोलियाँ नीली और दो लाल।

A₄— एक गोली नीली और तीन लाल।

A_s— वारो लाल गोलियाँ। प्रयोग के पहिले भाग में एक वर्तन बाद्दिष्टक विधि से चुना जाता है। फिर चुने

प्रधान के पहिले भाग स एक बतन सादुन्छक बाध से चुना जाता है। कि चुन हुए बर्तन में से दो गोलियों यादुन्छिक विधिय से चुनी जाती है। हरएक गोली को चुनने के बाद उसको बाक्स बर्तन में रल दिया जाता है। यदि दोनों चुनी हुई गोलियों लाल हों तो तीसरे चुनाव में भी पोचों बर्तनों में शे खाल गोली के चुने जाने की न्या प्राधिकता होगी?

यदि हम दोनी गोलियो के लाल होने की घटना को Bसे सूचित करें ही

$$P(B) = \frac{\left(\frac{o}{4}\right)^{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2} + \left(\frac{2}{4}\right)^{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{6} + \left(\frac{4}{4}\right)^{6}}{5}$$
$$= \frac{30}{16 \times 5}$$
$$= \frac{3}{8}$$

BAC हारा हम उस घटना को सूचित करते हैं जिसमें तीनो चुनी हुई गोलियो का रग लाल हो।

$$P(B \cap C) = \frac{\left(\frac{0}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^5 + \left(\frac{4}{4}\right)^5}{5}$$

$$= \frac{100}{64 \times 5}$$

$$= \frac{5}{16}$$

$$\therefore P(C/B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)}$$

$$= \frac{5/16}{3/8}$$

$$= 5/6$$

उत्पर के उदाहरण में बाद कुल n+1 बर्तन ही जिनमें से मुखे कमें गोलियों को सख्या n बीर लाल गोलियों की तख्या कमश $0,1,2,3,\cdots,n$ हो और बाद प्रथम n चुना वो में लाल गोलियों चुनी गयी हो तो (n+1) वें चुनाव पर भी काल गोली के चुने जाने की प्रायंकता

$$P = \sum_{\substack{n=1\\ \frac{n}{n} \\ \sum z=1}}^{n} \left(\frac{r}{n}\right)^{n+2}$$

$$= \frac{n+1}{r_{n+2}} \qquad (3.18)$$

जहाँ 😑 के सकेत के अर्थ है लगभग बराबर होना।

इस सूत्र के प्रधोग के समय हमें यह बात ष्यान में रखनी लाहिए कि हमें यह जात है कि हर एक बर्तन के चुने जोने की प्राधिकता बराबर है। कुछ छोग इस सूत्र का प्रयोग छक्त अवस्था में भी करते हैं एवव उन्हें का प्राधिकताओं के बारे में कोई जान नहीं होता। ऐसी क्षात्रा को अवस्था में वे विक्रित सच्यों की प्राधिकता को समान मान छेते हैं। परतु यह उपयोग उनित नहीं है।

लाप्लास ने दसका प्रयोग सूर्य के उदय होने की प्रायिकता के परिकलन के लिए किया गा । यदि शाचीन रिकार्डों के आचार पर हम यह जानते हैं कि सूर्य पिछले पीच सहल वर्षों में रोज उदय होता रहा है तो

n==1,826,213 दिन

मारियको के मिळान्त और उपयोग

ξ¥

वद यह तय करना बाप हो ने ऊपर छोडा जाता है कि इस प्रकार प्राधिकता का परिवन्दन निम हद तन उचित है। भून (3 18) को जिन अभियारणात्रों के आयार पर निकाला गया था क्या वे इस उदाहरण के लिए सत्य है ? कुछ 1, 826, 214 दिनी में से जिन दिनों में मुर्योदय हुआ हो उनकी मह्या के लिए मान 0, 1, 2, 1, 826,

214 घारण करने की क्या कोई पूर्वन गृहीत प्राधिकनाएँ हैं ? यदि नहीं तो इच्छा-ममार इन प्राधिक नाओं को समान समझ छेना वहाँ तक ठीक है ?

अच्याय ४

प्रायिकता बंटन और याद्ञिक्क चर

(Probability Distribution and Random Variable)

६४१ यादृच्छिक चर

याद्विष्ठक प्रयोग क्या होते हैं, यह आप जानते ही है। अधिकतर इन प्रयोगों के फनों को मत्या के रूप में रखा जा सकता है। जहां भी प्रयोग किसी चर के निनने अपवा नापने से सबिधत है यह फल स्पटतवा सस्या के रूप में रखे जा सकते हैं। कई और अस्याओं में भी हम मस्याओं से को को की सूचित कर सकते हैं। जवाहरण के लिए एक नवजात शिया के लिए हम एक सकते बना सकते हैं जिसमें लक्के को 1 और खड़की की 0 से सूचित किया जाता हो। इसी प्रकार के नियम और अधिक जिल्ला हो। इसी प्रकार के नियम और अधिक जिल्ला हो।

इस अध्याय में और उसके पश्चात् भी हम अधिकतर उन्हीं प्रयोगों के सबध में चर्चा करेंगे जिनमें फल को सख्या का रूप दिया जा सकता हो। यह चर जो प्रयोग के फल को सूचित करता है यद्विष्णक चर (random variable) कहलाता है। यदि इस चरको X हारा सूचित किया जाय तो प्रयोग के मिल-भिन्न फलो के अनुसार X मिल-भिन्न मारण करता है। बयोकि एक याद्विष्णक प्रयोग में विभिन्न फलो की निम्नित प्रायान करते हैं। इस याद्विष्णक प्रयोग में विभिन्न फलो की निम्नित प्रायाक होती है, इस याद्विष्णक चर X की विभिन्न मानो को घारण करते की प्रायक्त मी निश्चित हो जाती है।

P(X=a) से हम उस घटना की प्राधिकता की सूचित करेंगे जब X का मान 2 ही। इसी प्रकार $P(a < X \le b)$ हारा हम उस घटना की प्राधिकता को सूचित करेंगे जब कि X का मान 2 से अधिक और b से कम अथवा उसके दासर हो। यदि हमें हर एक मान-यूम a और b के िल्प $P(a < X \le b)$ जात हो तो हम कहते हैं कि हमें X का प्राधिकता बटन (probability distribution) मालूम है।

उदाहरण के लिए पाने को फेकने के यादुष्लिक प्रयोग को ही लीजिए। इसमें हम पाँसे के ऊपर के मुख पर बिद्वों की सख्या को X से सुचित करेंगे। यह X एक याद्च्छिक चर है जिसका मान 1,2,3,4 5 और 6 हो सकता है। इन सब मानो की प्राधिकता बराबर है।

$$P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)=P(X=6)=\frac{1}{6}$$
 अब कोई भी दो सस्पाएँ a और b को केक्ट हम $P[a< X \le b]$

का परिवरन सरस्ता से कर सकते हैं।

उदाहरणार्थं मान लोजिए a=2, b=451

$$P[a < X \le b] = P[z < X \le 4.5]$$

= $P[(X=3)U(X=4)]$
= $P(X=3) + P(X=4)$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

=<u>I</u>

६ ४ २ असतत वटन (Discrete distribution)

ऐसे बटन को जिसमें बाद्षिकक चर माना की केवल एक परिमित (finte) सख्या भारण कर सकता है असतत बटन कहते हैं।

इस प्रकार का चर एक असतत चर कहलाता है। ऊपर के उदाहरण में बाद् ज्छिक चर X का बटन असतत है।

§४२१ यादच्छिक चर के फलन का वटन

यदि X एक यावृष्टिक चर हो तो X ना ऐसा फल्न g(X) भी जो X के निवीं एक मान के लिए एक ही निविचत मान धारण करता हो, एक यावृष्टिक चर है। क्रमर के उदाहरण के लिए X^a एक यावृष्टिक चर है जिसना प्राधिनता बटन निम्निलिख होगा

$$P[X^{2}=1] = P[X=1] = \frac{1}{6}$$

$$P[X^{2}=1] = P[X^{2}=4] = P[X^{2}=9] = P[X^{2}=16] = P[X^{2}=25]$$

$$= P[X^{2}=36] = \frac{1}{6}$$

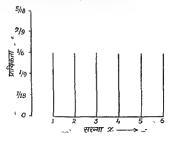
क्योंकि X^2 एक कर है जिसके साथ एक प्राधिकता बटन सबियत है, इस कारण यह भी एक याद्छिक कर है। ξ — (X^2-3X) भी एक याद्छिक कर है। जिसका प्राधिकते विदर्श निम्निकित विधि से मालूम किया जा सकता है।

बाद
$$[X=1]$$
 तो $\xi=t^2-3\times t=-2$
बाद $[X=2]$ तो $\xi=2^3-3\times 2=-2$
बाद $[X=3]$ तो $\xi=3^3-3\times 3=0$
बाद $[X=4]$ तो $\xi=4^3-3\times 4=-4$
बाद $[X=5]$ तो $\xi=5^3-3\times 5=10$
बाद $[X=6]$ तो $\xi=6^3-3\times 6=18$
 $\therefore P[\xi=-2]=P[(X=1)U(X=2)]=\frac{\pi}{6}$
बाद $P[\xi=0]=P[\xi=10]=P[\xi=18]=\frac{\pi}{6}$

इस प्रकार X के किसी भी फलन का प्रायिकता-उटन मालूम विया जा सकता है। यदि $g^{-1}(a,b)$ द्वारा हम X के उन सब मानों के कुलक (set) की सूचित करें जिनके लिए $a < v(X) \leqslant b$

$$\vec{a}$$
 $P[a < g(X) \le b] = P[X \in g^{-1}(a, b)]$.. (4.1)

जहाँ $X \in g^{-1}(a,b)$ का अर्थ है X का $g^{-1}(a,b)$ में से कोई एक मान घारण करना। यदि हमें X का प्राधिकता बटन ज्ञात है तो हम उत्तर के समीकरण में बाहिनी और के भाग का परिकलन कर सकते हैं। उत्तर के उदाहरण में



चित्र १३--पाँसा फॅंकने पर ऊपर की बिन्दुओं की संख्या का प्राधिकता-घंटन

$$P[o < X^{2} \le 5] = P[o < X \le +\sqrt{5}] + P[-\sqrt{5} \le x < 0]$$

$$= P[(X = 1)U(X = 2)]$$

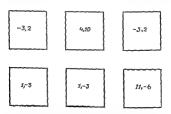
$$= P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \frac{1}{5}$$

जिस प्रकार वारवारता बटन को जित्र द्वारा सनझा जा सकता है छमी प्रकार
प्राधिकता-तटन का भी जित्रण हो सकता है।

§ ४.२२ द्वि-विमिनीय यादृष्ठिक वर (Two-dimensional random

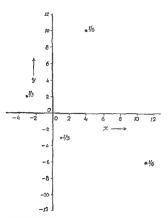
vanable) मान जीजिए कि एक पामा ऐसा बनाया गया है जिसने हर एक मुख पर हो मखाएँ लिखी हुई हैं। प्रयोग है पासे को फेंक्कर ऊपर वे मुख की सख्याओं को गोट करना)



चित्र १४--एक पति के छः मुख

यह सस्ताओं का सुग्म एक याद्विज्ज वर है नवीकि इसके भिन्न-भिन्न मानों के लाम
प्रामिकता सर्विति है। इस प्रकार के जर को—जिसमें दो सस्वाएँ विमो विशेष कम
में दी हुई हो—दि-विमितीय चर कहते हैं। जिस प्रकार अब तक हम गाइन्डिंग वर
को X से सूचित करते बाये हैं उसी प्रकार एक डिविमितीय चर को (X, Y) के विनि
किस्सा में सक्ता है। (X, Y) के प्रामिकता बच्च की हम प्रामिकता कव्य-निक्सा |
(Problability mass) की देस करना कर समते हैं जो एक दि-विमितीय परावल
पर दित्ति हैं। इसीलए इस प्रकार के बटन को विज द्वारा सूचित वियाजा सकता

है। ऊपर के उदाहरण मे जो (X, Y) का नटन है उसे निज मे नीचे दी हुई विधि से रक्षा जा सकता है।



चित्र १५-चित्र १४ में दिये हुए पांसे की फेंकने से प्राप्त द्विविसतीय चर का घंटन

इस पाद् च्छिक घर-युग्म के लिए

P [(X, Y)=(-3, 2)]= $\frac{1}{3}$ P [(X, Y)=(1, -3)]= $\frac{1}{3}$ P [(X, Y)=(4, 10)]== $\frac{1}{6}$

 $P[(X, Y)=(xx, -6)]=\frac{1}{6}$

६ ४·२·३ द्वि-विमितीय चर के फलन का बटन

हम देख चुने हैं कि बाद हमें X का प्रामिनवा बटन सात हो वो हम उसके किसी भी फलत g(X) जा प्रामिनवा बटन मालूम कर सबते हैं। इसी मकार बाद हमें (X,Y) करन बात हो वो इनके एक-मिश्रीय सचा द्वि-मिश्रीय फलनो के प्रामिकवा बटन भी प्राप्त किये जा सबते हैं।

उदाहरण—यदि (X,Y) का वटन ऊपर लिखित है तो $P[(X+Y)\leqslant 10]$ क्या होगी ?

विष
$$(X, Y) = (x_1, -6)$$
 तो $(X+Y) = 5$
∴ $P[(X+Y) \le x_0] = P[\{(X+Y) = -1\} \cup \{(X+Y) = -2\}$

$$(X+Y) \le 10$$
 = $P[\{(X+Y)=-1\} \cup \{(X+Y)=-2\} \cup \{(X+Y)=5\}]$

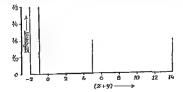
$$=P[(X+Y)=-1]+P[(X+Y)=-2]+P$$

$$[(X+Y)=5]$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

 $=\frac{5}{6}$

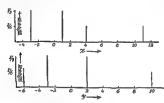
इसी प्रकार किन्ही भी दो मानो a और b के बीच में (X+Y) के पाये जाने की प्रायिकता का परिकलन भी किया जा सकता है। (X+Y) एक विभिन्नीय चर है जिसके प्रायिकता-चटन को निम्मिल्लिन रीति से चित्रित किया जा सकता है।



चित्र १६—चित्र १४ में दिये हुए पाँसे को फॅकने से आप्त ऊपर के मुख की संख्याओं के योग (X-{-Y} का आविकता-बंटन

§ ४.२.४ एक-पाश्वीय वंटन (Marginal Distribution)

(X,Y) का बटन ज्ञात होने पर हम X और Y के बटनों को अलग-अलग भी मालूम कर सनते हैं। इन बटनों को एक-पार्सीय बटन कहते हैं। ऊपर के चित्र, सस्या z5 में (X,Y) का बटन दिखाया गया है। उसमें प्रायित्ता प्रव्य-मान विदुओ का कमज्ञ X और Y निर्देशाक्षों पर प्रक्षेप (projection) करने पर ये एक-पार्सीय बटन प्राप्त हो सबते हैं।



यदि (X,Y) का नदन ब्रात हो तो हम X और Y के बदन मालूम कर सकते हैं, परतु यदि X और Y के बदन मालूम हो तो (X,Y) का बदन मालूम कर लेना समय नहीं है। इसका कारण यह है कि (X,Y) के अनियत्तत बदन ऐसे मालूम निम्ने जा सकते हैं निजके एक-पास्त्रीय पदन समान हों। उदाहरण के लिए (X,Y) के निम्मिलीहत बदनों का विचार कीलिए

- (I) $P[(X, Y)=(1, 1)]=\frac{1}{x}$ $P[(X, Y)=(2, 1)]=\frac{1}{x}$ $P[(X, Y)=(1, 2)]=\frac{1}{x}$ $P[(X, Y)=(2, 2)]=\frac{1}{x}$ (2) $P[(X, Y)=(2, 1)]=\frac{1}{y}$ $P[(X, Y)=(2, 1)]=\frac{1}{y}$
- P[(X, Y) = (1, 1)] = P[(X, Y) = (2, 1)] = P[(X, Y) = (1, 2)] = P[(X, Y) = (2, 2)] = P[(X, Y

इन दोनो द्वि-विभितीय बटचो के एक-पार्कीय बटन समान ही है जो निम्न-विसित हैं—

$$X$$
 के लिए $P(X=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{1}{2}$
 Y के लिए $P(Y=1)=\frac{1}{2}$, $P(Y=2)=\frac{1}{6}$

इससे यह सिद्ध हो गया कि X और Y दोनों के बटन जात होने पर भी समुस्त बटन (Joint distribution) यालूम करना हमेशा सभव नहीं है। इसी प्रकार X और Y के एक-पार्थ्वीय बटन मालूम होने से (X+Y) का बटन मालूम कर लेगा हमेशा सभव नहीं होता।

६ ४३ सतत बटन (Continuous distribution)

हम यह पहुले ही कह चुके हैं कि किसी बाद्धिक चर के प्रायिकता-बटन के ज्ञात होने का अर्थ है प्रत्येक मान युम्म a और b के बीच में इस चर के पाये जाने की प्रायिकता का ज्ञात होना । बान की जिए कि हमें किसी याद्धिक चर X का बटन साल्म है । यदि x, b और b 'कोई तीन सक्याएँ है जो हमें $P\{x-b< X \leqslant x+b'\}$ अर्थात् X के जतराज [x-b, x+b'] में पाये जाने की प्रायिकता ज्ञात होनी चारिय ।

इस अवराल की लगाई ($\delta+8'$) है और इस अवराल में प्राधिकता $P\left[x-\delta < X \leqslant x+\delta'\right]$ विचारित है। एसलिए औसवन अवराल की एक इकाई लगाई में प्राधिकता $P\left[x-\delta < X \leqslant x+\delta'\right]$ होगी। जिस दृष्टिकोण से प्राधिकता की $\delta+\delta'$

इय्य-मान के रूप में करपान की जा सकती, उसी दृष्टिकोण से करर दी हुई यह औसत प्रापिकता प्रति इंकाई अन्तराल में प्रापिकता-पनत्व (probability density) समझा जा सकता है। 8 और के के विभिन्न मानो के लिए हमें विभिन्न अतराल प्राप्त होंगे और इनमें से प्रयोज स्वतराल के लिए प्रापिकता-पनत्व मानुस किया जा सकता है।

यदि 🛭 बीर है' के मानों को कमश छोटे करते चले जायें, जिससे कि वे दोनों सून्य की जोर प्रवृत्त होने जायें, तो यह सभव है कि तत्सव वी अतरालों में प्राधिकता-मन्दन किसी विशेष मध्या को ओर प्रवृत्त होता जाय । यदि ऐसा हो सी इस विशेष सख्या को हम याद्विख्यक चर X का विदु x पर प्राधिकता-मद्या (probably density of the random variable X at point x) कहते हैं । इसी प्रकार दूस देविड्ओं एस केंद्रित अगरालों में प्राधिकता प्रवास की सीमाएँ भी प्रण्य की जा सकती है। आपका ध्यान कदाचिन् अपने पूर्व-मरिचित चरो नी ओर जायगा और आप यह जानना चाहुंग कि इनके लिए विभिन्न बिदुओं पर प्रायिकता घनत्व कितना है। बात्तव में अभी तक हमने बिल चरो वे पिरचय प्राप्त विया है वे गिनती में केवल योडे सेही मानों को धारण कर सकते हैं। वर्षात् दूबरे मानों के धारण वरने नी प्रायिकता इन चरों के लिए शुन्य होती है।

सात लेकिए, हम एक ऐसा चर लेते हैं जिसके लिए $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=\frac{1}{4}$ सात लेजिए x को 1 3 ठ की 0 2 तथा ठ की 0 3 ले । ती इस जतराल $P(x_1=x_1)=P(x_2=x_2)=P(x_1=x_2)$

में प्रायिकता-घनत्व = $\frac{P[(1 3-0 2)< X \le (1 3+0 3)]}{0 2+0 3}$

$$= \frac{P[1 : \langle X \leqslant 1 : 6]}{0 : 5} \text{ होगा }$$

परन्तु P [I I<X<I6] \Longrightarrow 0 न्यों के I I और I 6 के बीच का कोई मान X प्रहुण नहीं कर सकता, इसिक्ट यह चनत्व धून्य हुआ। अब यदि xको I 3 ही रसा आप तथा δ और δ ' को कमम घटाते जामें तो आप रेखेंगे कि हस प्रकार से प्रान्त प्रश्नेक अतरात्व में प्रायिकता-पनत्व शून्य होगा। इसिक्ट बिंदु x \Longrightarrow I 3 पर X का प्रायिकता-पनत्व सून्य है। इसी प्रकार I, J, J और J के छोडकर किसी भी बिंदु पर प्रायिकता-पनत्व सून्य होगा, यह सिक्ट विनया जा तकता है।

आइए, अब हम यह देखें कि इन चार बिंदुओ पर प्राप्तिकता-धनत्व क्या है। मान लीजिए कि—

$$x=1$$
 0, $\delta=0$ 5, $\delta'=0$ 5 । $(\lambda-\delta, x+\delta)$ भें प्रामिकता-मनत्व $=\frac{P[0.5 < X \le 1.5]}{1.0}$ $=\frac{P(X=1)}{1.0}$

यदि x = 10, 8 =02, 8'=02 तो (x-8, x-|-8') में

प्राधिकताधनत्व=
$$P[0\frac{8 < X \le 1}{0.4} \le 1]$$

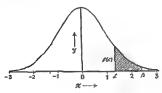
इस प्रकार हम देखते हैं कि ज्यो-ज्यों 8 और 8' घटते जाते हैं त्यो-त्यों इस अनु-पास में जदा (numerator) नो नहीं रहता है, परतु हर (denominator) घटता जला जाता है। इस प्रकार 8 और 8' को काफी छोटे मान देकर इस अनुपास को हम किसी भी दिये हुए मान से अधिक बढ़ा कर सकते हैं। इस प्रकार इस विदु पर प्रामिकता घनत्व अनत है। इसी प्रकार विदु x=2, x=3 और x=4 पर मी प्रिमिकता घनत्व अनत है। इसी प्रकार विदु x=2, x=3 और x=4 पर मी प्रमिकता घनत्व अनत कि किया जा सकता है। यह तो हमने एक उदाहरण किया था, परतु इसी प्रकार विभी भी असतत चर के किए यह सिद्ध किया जा सकता है कि वह जिन मानों को निसी भी धनारमक प्रामिकता से वारण कर सकता है छप पर उसका प्रामिकता-चनत्व अनत और अस्य सब विदु वो पर उसका प्रामिकता-चनत्व प्राम्य होता है। इस प्रकार इस याबू किक चरों के लिए विभिन्न विदु वो पर प्रामिकता-चनत्व नातने से इसे केवल यह मालूस हो सकता है कि किन विदु वो पर प्रामिकता सन्य नहीं है।

परंतु हम दूसरे अध्याय में सतत चरो से परिचय प्राप्त कर ही चुके हैं । यदि किसी याद्धिक प्रयोग द्वारा हमें इस प्रकार का चर प्राप्त हो वो यह एक सतत गाद्दुं चिक्र में चर होगा । इस प्रकार के चर अपने परास में स्थित किसी भी वो मानों के बीच के सभी मानों को बीच को सारण कर सकते हैं । इस प्रकार के चर के हिए यदि हम इसके परास में कोई अतराज के बार के होंगे की प्राप्त कर सकते हैं कि इस पूरे अतराज में चर के होंगे की प्राप्त कर तराज में चर के होंगे की प्राप्त करात उस स्वतराज के किसी भी छोटे भाग में होने की प्राप्तिकता से अधिक होगी । इस प्रकार किसी विदु पर केंद्रित अतराज में श्रीवकता का परिफल्स करते समय न केवज अतराज को अवर्ध पूर्ण की और प्रमुत होती है नरम् इस अनुपत्त का अरा (numerator) अर्थात् जतराज में स्वित प्राप्तिकता भी गूप्त की प्राप्त होता है। इस प्रकार वह कि प्राप्तिकता ध्वार चुर्ण और अनत के बीच का कोई परिपित मान हो। इस प्रकार का वटन जिससे प्रयोक विदु पर प्राप्तिकता-पनत्य अतत से विद परिपित संस्था होगी है एक सतत बटन कहलाता है।

यदि यादृष्टिक कर X का बटन सतत हो तो बिंदु x पर इसके प्रायिकता घनत्य को f(x) से सूचित करते हैं ।

$$f(z) = \begin{cases} \delta \to 0 \\ \delta' \to 0 \end{cases} \frac{P[x - \delta < X \le x + \delta']}{\delta + \delta'} \tag{4.2}$$

सतत बटन को हम वारवारना फलन $y = \int (x)$ के ग्राफ या लेखा चित्र से चित्रित कर सकते हैं।



नित्र १८-एक सतत घटन का आवृत्ति फलन-

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

इस वक और x— निर्देशाक्ष के बीच का क्षेत्रफळ 1 होता है। यदि पत्तव-फळ f(x) है वी यातृष्टिक चर X के अतराळ [a,b] में पासे जाने की मामिनता को $\int_{\mathbb{R}}^{b} f(x) \, dx$ से मूर्वित किया आता है। ऊपर के दिये हुए चित्र में X के कियी मात्र x के उत्तर के उत्तर के उत्तर के दिये हुए चित्र में X के कियी मात्र x के उत्तर के पर y का मात्र f(x) है। यदि दो बिहुओं (a,o) और (b,o) से दो ऊर्ज्व रेखाएँ सीची जावें तो x-निर्देशाक्ष, बारवारता-तक और इत रेखाओं के बीच का क्षेत्रफळ—जिसको चित्र में टेडी रेखाओं से डॉका हुआ है— $\int_{\mathbb{R}}^{b} f(x) \, dx$ ही होगा । इस प्रकार हमें इस चित्र हारा वस्त का बहुत कुछ आभारा हो जाता है। इसका स्वस्थ वही है जो समस्ति के उत्तर वारवारता-चित्र का होता है।

नाचे सतत बटनों के कुछ उदाहरण दिये हुए हैं।

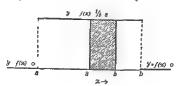
६ ४ ३ १ आयताकार वटन (Rectangular distribution)

$$f(x) = 0 \qquad \text{aff} \qquad x < a$$

$$f(x) = \int_{b-a}^{1} \qquad \text{aff} \qquad a \le x \le b$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{aff} \qquad x > b$$

इस जितरण को आयताकार बटन (rectangular distribution) कहते है। इसका कारण यह है कि किन्ही भी दो मानो के बीच में X के पाये जाने की प्रायिकता की एक आयत द्वारा चित्रित निया जा सकता है।



चित्र १९-- भायताकार वटन में $P[a' < X \leqslant b]$

६ ४३२ प्रसामान्य घटन (Normal distribution)

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2r}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$
 $-\infty < X < +\infty$

जहाँ म एक बृत्त की परिषि (cucumference) और ब्यास (diameter) का अनुपात है तथा ८ एक सस्या है जिसका भाग निम्निकिसित अनत श्रेणी (infinite series) में प्राप्त होता है।

इस वटन का प्रायिकता घनत्व पहिले ही चिन सस्या १८ में चिनित किया जा चका है।

यहस्पष्ट है कि किसी सतत बटन में बर के किसी भी मान a के लिए P[X=a] = 01 यह इस कारण कि यह प्राधिकता ऊपर विये हुए नियम के अनुमार दो ऊम्ब रेसाओ के बीच का क्षेत्रफल होना चाहिए, परतु जब इन दो रेखाओं के बीच का बतार सूर्य हो गया तो स्वष्ट है कि यह क्षेत्रफल भी शून्य होगा।

अय शब्दों में
$$\int_{0}^{\pi} f(x) dx = 0$$
 (4.4)

§ ४ ४ सचयी-प्रायिकता फलन (Cumulative distribution or distribution function) —

 $F(x) = P[X \leqslant x]$ (4.5)

$$P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx \qquad (46)$$

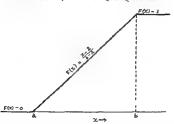
§ ४४१ सनयी प्रायिकता फलन के गुण

क्यों कि प्राधिकता वक और x-निर्देशास के बीच का कुछ क्षेत्रफल I होता है, इस कारण F(x) जो इसकें बच्छा का नह भाग है जो ऊप्त रेसा $X \longrightarrow x$ के बादी और पत्ता है I से अधिक नहीं हो सकता । वैसे भी क्यों कि यह X के मान x से क्या अथवा जसके दायद होने तक की प्राधिकता है इसिक्ट प्राधिकता की माति इसका मान o और I के बीच की कोई सक्या ही हो सकता है I

आइए, जब हम देखें कि यदि X का बटत a और b के बीच बायताकार हो ती उसका सचयी प्राधिकता फलन क्या होगा।

$$F(x)=0$$
 यदि $x \le a$
$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$
 यदि $a \le x \le b$
$$F(x) \Rightarrow 1$$
 यदि $x > b$

जैसे दूसरे अध्याय में हमने समिट्ट के लिए सचयी बारबारता चित्र बनाये थे, उसी प्रकार सचयी प्रायक्ता फलन को भी चित्र द्वारा निरूपित किया जा सक्ता है । ऊपर के आयताकार बटन के लिए जो चित्र प्राप्त होगा वह तीचे दिया जा रहा हैं।



चित्र २०--आयताकार बदन का सचित प्राधिकताफलन

आपका ध्यान इस ओर गया होगा कि इस चित्र में x के बबने के साथ F(x) का मान दा तो बढ़ता है या स्थिर रहता है, परतु कही भी x के बबने पर F(x) का मान घटता नहीं । सचयी बारबारता प्राप्त करने की विधि से ही यह स्थाट हो जायगा कि यह बात केवल इस विरोप वटन के लिए ही नहीं बित्व सभी बटनों के लिए सत्य है।

मान लीजिए कि x_1 और x_2 दो मान है जिनमे x_1 छोटा है, यानी $x_1 < x_2$, तो किसी भी बटन के लिए

$$F(X_2) = P(X \leqslant x_2)$$

= $P[(X \leqslant x_1) \ U(x_1 \leqslant X \leqslant x_2)]$

$$=P(X \leqslant x_1) + P[x_1 < X \leqslant x_2]$$

= $F(x_1) + P[x_1 < X \leqslant x_1]$

परतु क्योंकि $P[x_1 < X \leqslant x_2]$ का छोटे-से-छोटा मान शून्य ही हो सकता है, इसिलए यदि $x_2 > x_1$ हो तो

$$F(x_2) \ge F(x_3)$$
 (4.7)

६ ४ ५ स्वतत्र चर (Independent variables) —

तीसरे अध्याय में हम स्वतंत्र घटनायों की परिभाषा दे चुके हैं। यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हो तो यह सिद्ध किया जा चुका है कि

$$P(A \cap B) = P(B) \cap P(B)$$

यदि(X, Y) एक दि विमिनीय सादृष्टिक चर हो और हर एक मानसूग्म (a_1, a_2) तथा (b_1, b_2) के छिए

$$P[(a_1 \leqslant X \leqslant a_2) \cap (b_1 \leqslant Y \leqslant b_2)]$$

$$= P[a_1 \leqslant X \leqslant a_2] P[b_1 \leqslant Y \leqslant b_2]$$

हो तो वायुण्डिक चर X और Y एक दूसरे से स्वतन कहलाते है। इस प्रकार हम रेखते हैं कि यदि Y का मान दिया हुआ हो अथवा यह दिया हुआ हो कि Y एक विरोप अवराज में स्थित है और मिर्ट वह X हो स्वतन हो तो दुस हान का X के प्रविचयी प्रायिकता-बटन पर कुछ भी प्रभाव नहीं पढता। इसी प्रकार से के सबय में किती प्रतिबय का उससे स्वतन किसी चर Y पर प्रभाव नहीं पढता।

यदि X और Y असतत वरही जो कमश x_2, x_3, \dots, x_m तथा y_2, y_3, \dots, y_n , मान धारण कर सकते हो तो

$$P[X=x_i, Y=y_j]=P[X=x_i]P[Y=y_j]$$
. (4.8)
 $i=1, 2, m, j=1,2, u$

इस प्रकार यदि हमें X और Y के बटन ज्ञात हो और यदि यह भी मालूम हो कि ये दोनों चर हननब है तो हम इन दोनों का अयुक्त-बटन (Joint distribution) इनके जलन-जलम बटनों के गुणन से प्राप्त कर सकते हैं।

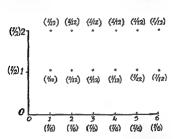
रनी प्रकार यदि सतत चर X और Yस्वत्तन हों, उनके घनत्व फलन कमश f(x) त $^{(x)}$ ति और उनके संयुक्त वटन का घनत्व-फलन f(x,y) हो तो

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) \dots (4.9)$$

संयुक्त-बंटन के घनत्व पत्रन की परिभाषा भी उसी प्रकार दी जा सकती है जिस प्रकार किया एक विभिन्नीय यादिन्छन चर के घनत्व परून की

$$f(x y) = \underbrace{\delta_1}_{\delta_2} \underbrace{\delta_1}_{\delta_2} \xrightarrow{\rho} \underbrace{\rho \left[\left(x - \delta_1 < X < x + \delta_1 \right) \left(y - \delta_2 < Y < y + \delta_2 \right) \right]}_{\left(\delta_1 + \delta_1\right) \left(\delta_2 + \delta_2\right)}$$

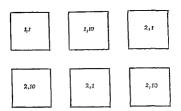
उदाहरण (१)—एक पाँसा और एक रुपया साथ-साथ उछांग्ने जाते हैं। X एक याद्विष्टर कर है जिसका माम पीये के उपर के मुख पर प्राप्त बिद्यों से बरावर है। X भी एक याद्विष्टक वर है। बिद रुपया बिद्या पढ़े तो इसका मान होता है सिद वह पट पड़े तो इसका मान 2 होता है। ये दोना याद्विष्टक वर स्वस्ट त्या स्वतन है, इसिल्ए इनका समुन्त बटन गीचे दिये हुए चिन ने अनुसार होगा।



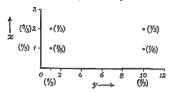
वित्र २१--दो स्वतत्र याष्ट्रिकक चरो के संयक्त और एक-पाःवींय घटन

(२) अब मान लीजिए कि एक पाँस है प्रत्येक मुख पर बिन्दुया ने स्थान पर दो-दो मख्याएँ लिखी हुई है जो नीचे दिये हुए चित्र ने जनुसार है ।

पांसे को फ़ेंकले से जो मुख कपर की ओर जाता है उस पर लिखी हुई पहिला सस्या को ह और दूसरी सख्या को µ से सूचित विया जाय तो ह और ॥ वा सयुक्त बटन चित्रं सख्या २२ के अनुसार होगा।



चित्र २२--- एक पाँसे के छ. मुख



चित्र २३—चित्र २२ में दक्षित पत्ति को फेंकने से प्राप्त ऊपर की संस्थाओं का सयुक्त बटन

इस उदाहरण से हमें यह मालूम पडता है कि दो यादृच्छिक घरो में भौतिक सबध होते हुए भी वे एक दूसरे से स्वतन हो सकते हैं।

🐧 ४ ६ प्राधिकता बंटन के प्रति समाकलन (Integration with respect

to a probability distribution)

मान लीजिए कि X एक असतत यादृष्टिक चर है जो a_1, a_2, \dots, a_n आदि n मान घारण करता है।

मान छोजिए $g\left(X\right)$ याद्ष्किक चर X का एक फलन है और $P\left(x\right)$ $\Longrightarrow P\left(X=x\right)$ । तव

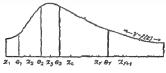
 $\Sigma g(x) P(x) := g(a_1) P(a_1) + g(a_2) P(a_2) + .+ g(a_n) P(a_n)$ मो हम X के प्राधिकता बटन के प्रति समाकतन कहते हैं और इस समाकतन की $\int g(x) dF(x)$ से सुवित करते हैं।

$$d F(x) = F(x) - F(x - dx)$$

$$= P[x - dx < X < x]$$

$$= P(x)$$

यदि dx इतना छोटा हो कि x-dx और x के बोच में X का कोई भी समब मात a_1 , a_2 आदि a_1 हो। यदि P(x) के न्यांग पर हम नमस्टि की अलिंग्निक द्रारवाराजा की एमें तो हम देन सनते है कि हमें इस मकार g(X) का आतत मात्राम्य हो जायमा। इती प्रकार आपेटिक बारबारता के स्थान पर उसके आवर्ष कर भागिकता के हैं। ते पर यह समाकलन g(X) का प्रत्यानिक सात्राम पर यह समाकलन g(X) का प्रत्यानिक सात्राम व्यवसात्राम साव्य हैता है।



चिप २४

यदि यद्िष्ठक चर सतत है और उसका घनत्व-फलन f(x) हो तो इस चर के परास को छोटे-छोटे माको में विमाजित किया जा सकता है। मान लीजिए, इस प्रकार के विमाजनों की कम सहया दी हुई है और 1 वें माग में X का एक मान 0, है। तब हम एक योग का कलन कर सकते हैं जो निम्नलिखित है—

 $\sum g(\theta_r) f(\theta_r) (x_{r+1} - x_r)$

जहां ४, और ४,,1 जस जनराज के सीमनत विज्ञ है जियम 0, स्थित है। यदि हम इन विमान हो को छोटा करते चले जामें और इस मकार उनकी सख्या वडावे चले जामें तो यह योग एक निश्चिन मान की और अउसर होता है। जिस मान की और यह योग अपनर होता है जसे हम Xके मायकवा बटन के मति g (४) का समाक उन चहते है। इस समाकलन को हम $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$ द्वारा सूचित करते है। वसोकि x पर प्रायिकता चनत= f(x), इसलिए x-dx और x के वीच का प्रायिकता xस्थमान = f(x) dx

= F(x) - F(x - dx)= dF(x)

$$\int g\left(x\right)\,d\,F\left(x\right) = \sum g\left(a_{i}\right)\,P\left(a_{i}\right)\,\,\text{ यदि }X\text{ असतत हो }$$
 तथा
$$\int g\left(x\right)\,d\,F\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty}g\left(x\right)f\left(x\right)dx\,\,\,\text{ यदि }X\text{ सतत हो }i$$

§ ४'७ यादृच्छिक चर का प्रत्याशित मान अथवा माध्य (Expected value or mean value of a random variable)—

मान छीजिए कि g(X) = X तब $\int_X dF(x)$ की हम यादिण्डिक बर X का माध्य अपवा प्रत्याधित मान कहते हैं। और इसे E(X) से सुबित करते हैं। यह स्वापकी याद होगा कि यदि अंकड़ें अनुसित सारणी में दे रखे हों तो माध्य के लिए मिम्निलिखित सन का उपयोग होता है।

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{f_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i$$

मदिXएक असतत चर है तो

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$$

इसी प्रकारXके किसी फलन $g\left(X
ight)$ का प्रत्याशित मान

$$E[g(X)] = \int g(x) dF(x)$$

इन दोनों सूत्रों में बहुत अधिक समानता है। यदि आपेक्षिक बारबारता $\frac{\int_{\mathbf{n}}^{-}}{\mathbf{n}}$, $\sum_{\mathbf{n}=1}^{-}$

को जनह हम प्रायिकता $P(x_i)$ को रखें जो शस्तव में इस आपेक्षिक सार्यारता का आदर्श रूप है तो हमें पादुष्टिक जर का माध्य प्रक्त हो बाता है। इन दोनों में बिद्योप अंतर यही है कि पहले मुत्र का प्रयोग समाध्य पर किया जाता है जिसके बारे में हमें पूर्ण जात है जिसके बारे में हमें पूर्ण जात है, उसले इसरे पूर्ण का जाते है। प्रायुच्छ पर किया बिद्योग प्रदान के पाद्योग में बाग माना चारण बरेगा यह अनिश्चित रहता है। अहा हमें प्रयोग में बाग माना चारण बरेगा यह अनिश्चित रहता है। अहा हमें प्रायुक्त के पाट्यों में ही बात करनी एक्सी है।

६ ४८ यादृष्टिक चर के घूर्ण (Moments of a random variable)

जिस प्रकार समध्य में मध्यातरित ह वॉ धुर्ण

$$\mu_r \mapsto \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^r \frac{f_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i$$

होता है उसी प्रकार याद्षिक कर का I वो पूग $\mu_* \Longrightarrow [v-E(X)]'dF(v)$ होता है । इसके इसरे मध्याग्तरित पूर्ण $\mu_* \Longrightarrow [x-E(X)]'dF(x)$ को घर का प्रमुख्य (variance) कहते हैं । अधिकत्तर E(X) को μ तथा $E(X-\mu)^n$ को V(X) ते सूचित किया जाता है । अध्यक्तिर के वर्ष प्रांति ही याद्षिक कर के a-अातरिक पूर्णों को परिकामा भी दी जा करती है । a-आतरिक भूगों की एक्शामा भी दी जा करती है । a-आतरिक भूगों की एक्शामा भी श्री जा करती है । a-आतरिक भूगों की एक्शामा भी श्री जा करती है । a-आतरिक भूगों की एक्शामा भी उसी प्रकार का होता है ।

६ ४९ स्वतत्र चरो के गुणनफल का अत्यासित मान

यदि बटन असतत हो तो

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_i P[X = x_i, Y = y]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_i P[X = x_i] P[Y = y_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_j P[X = x_i] P[Y = y_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P[X = x_i] \sum_{j=1}^{n} P[Y = y_i]$$

$$= E[X)E[Y]$$
(4 10)

दह मुत्र सतत बटनो के लिए भी जासानी से सिद्ध किया जा सकता है

§ ४१० चरो के योग का प्रत्याशित मान

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i + y_j) P(X=x_i Y=y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i + y_j) P(X=x_i Y=y_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j (X=x_i Y=y_j)$$

$$= E(X) \times E(Y_j)$$
(4.17)

म्हरू भूत्र सतत वटनो के लिए भी सरलता से सिद्ध हो सकता है।

परिकल्पना की जाँच (Testing of Hypothesis) और कुब महत्त्वपूर्ण प्रायिकता वंटन (Probability Distributions)

भाग २

अध्याय ५

मनोवैज्ञानिक पृष्ठभूमि

६ ५ १ नया बचनन में आपको परियो की कहानी पढ़ने ना शीक रहा है ? यदि ही तो आपने उस विचिन बर्तन के बारे में अवस्य मुना होगा जिसमे शहद भरा रहता या और चाहे जितना शहद उसमें से निकाल के बह जाकी नहीं होता था। यदि मैं आपको शहद से भरा हुआ एक बर्तन देकर कहूँ कि कीनिए यही वह प्रसिद्ध बर्तन है दिनके बारे में आपने बचनन में यहुत कुछ पढ़ा-सुना होगा तो आप मेरे इस नयन की जांच कैंमे करेंगे ?

आप कहूँने कि इस कथन की सचाई की जांच करने में क्या राता है। अपने मिनों को एक पार्टी शीजिए और उससे सबको काफी माना से शहद बाँट दीजिए। यदि बनेन जाली हो जाता है तो कथन गरुत है। लेकिन करूपना कीजिए कि वर्तन वास्तव से भरा का भरा ही रहता है तब आपको आरुष्य होगा और कदाचित मेरे कथन की सचाई में विश्वास हो हो जाता। लेकिन यदि आपका दुन्टिकोण आलोचना-रुपक है तो आप निष्यय ही मेरे कथन को सहय मानगर पसन्य नही परंगे। आप कह इकते हैं कि यदापि इस अथम जांच में यह बर्तन खाली नही हुआ, परन्तु इससे यह तो विश्व नही होता कि यह वही बर्तन है जिसका कहानियों से ब्यंग है। वह तो कभी पाली होता ही नही था। यदि यह वर्तन अथम प्रयास में खाली सही हुआ तो यह नहीं इस्ता सारकात के यह कभी खाली होगा ही नहीं। किर भी यदि वर्तन बार-बार जांच में उत्तीर्ण हो तो आपका विश्वास मेरे कथन पर देवंदर होता जानगा।

\$ ५ २ इस प्रकार हम देखते हैं कि गदि किसी कपन से ऐसा निजमं निकलसा है जो अनुभव में जिपरीत है तो हम उस कपन को ब्रूट समझते हैं। परन्तु यदि अनुभव पन निजमं के अनुबूक्त है तब भी हम यह नहीं समझ बैठते कि कपन सिद्ध हो गया। बत्तिक केवल उस कपन हमारा विद्यासायुद्धतर होता जाता है। यदि आपको परियों की कहानियों में न तो विल्जब्सी हों और न विश्वता ती उस दक्षा में आप उपयुक्ता कमन के प्रयोग करने का भी कष्ट न करेंगे और प्रारम्भ से ही मुले ब्रूटा समझँगे। ययपि विना प्रयोग के ही क्षपना मत स्थिर कर केना किसी वैज्ञानिक के लिए उचित नहीं है, फिर मी आपने इस गत से मुझे कुछ विरोध नहीं है । इसके लिए एक विश्वसन नीय उदाहरण देता हैं ।

\$ ५ ३ थोगुत के पर आरोप लगाया जाता है कि उन्होंने 'ल' का सूत्र तिया है। यह वहां जा सबता है कि २५ सिताब्बर की रात को थी 'ख' कलकते से दिल्ली जानेवाली गांडी में बहुत-सा चन लेकर यात्रा कर रहे से। थी 'क' उनके डिब्बे में घुस गये और श्री 'ख' के क्षी जाने पर उन्होंने घन चुराने वह प्रयास क्या। परन्तु श्री 'ल' को अवानक नीड दूट जाने पर उन्होंने घोर-गुल मंचाता चाहा। यह देसकर श्री 'क' घवरा क्ये उन्होंने पिस्तील निकालकर उसी दम श्री 'ल' का स्वार क्ये उन्होंने पिस्तील निकालकर उसी दम श्री 'ल' का समा

यह पुलिस का कहना है। पुलिस में श्री 'क' को तीन दिन परचात् दिस्ती में गिरफ्तार किया जब उनके पास उन नोडों में से कुछ पाये गये जी श्री 'ख' के पास दिल्ली जाते समय थे। आद्दे, जिस सिदान्त का प्रतिपादन हमने परियो की क्हानी में किया था उसका प्रयोग पुलिस के इस कथन पर करके देखें।

कपन है ''श्री 'व' ने थी' ख' को २५ सितम्बर की रात में कलकत्ते से जानेवाली रेलगाडी में भार डाला ।''

यदि यह कथन सन है तो यह निष्कर्ष निवस्त्वता है कि २५ शितस्वर की रात को 'क' और 'ल' एक ही रेजगाड़ी में यात्रा कर रहे थे । यदि यह निष्कर्ष गळत सिद्ध हो जाय तो जरपुरत्त कथन भी स्वमावत गळत सिद्ध हो जाय तो। मान कीजिए कि कई गबाह पापपुर्वत्व यह कहने को तैयार है कि 'क' २५ सितस्वर की रात की दिल्ली में बेति यही नहीं २५ तारील सेही विस्ली में रह रहे हैं। इस गबाही के बाद कीर यह जानते हुए कि एक ही व्यक्ति एक ही समय पर दो विभिन्न स्थानों में नहीं रह सकता, मूळ कथन कृता सिद्ध हो जाता है।

इसने विभरीत मान लेकिए कि कुछ गवाह इस निष्मपं की पुष्टि करते है नि भी 'क' बीर भी 'ब' एक ही रेलगाड़ी से बाता कर रहे थे। इस गवाहो ते यह सिंद नहीं होता कि 'क' ते 'स' का सून किया था। परन्तु पुलिस का कथन इस भारण अभिन्न विस्वसानीय हो जाता है।

यदि पुलिस के कथन से जनेको निष्कर्ष निकाले जायँ जिनकी पुष्टि गवाहों हारा हो तो न्यायाधील का विश्वास उनकी कहानी को सवाई में कमरा दृढनर होकर प्राय असरिस्थता में परिणत हो सनता है। फिर भी निष्कर्ष के प्रतिकृत एक भी गवाही मिलने पर उन सब गवाहियो का प्रभाग नष्ट हो जाता है जो कपन थे निष्कर्षों के अनुकुछ थी।

मान लीजिए कि निम्नलिखित बातें सिद्ध हो जाती है-

- (१) 'क' 'ख' से परिचित या।
- (२) 'ख' के खून के कुछ ही दिन पूर्व 'क' और 'ख' में किसी जमीन के टुक्डे के स्वामित्व को लेकर बहुत झगड़ा हुआ था।
- (३) 'क' और 'ख' एक ही गाडी से यात्रा कर रहे ये।
- (४) जब 'क' दिल्ली से रवाना हुआ तब उसके पास प्राय कुछ भी नहीं था। परन्तु जब वह चकता गया हो उसके पास बगद १,००० रुपया निकला। जब बाबी उनत पटनाओं को पुल्टि गवाही हारा कर चुका हो तो एक और घटना प्रकास में आती है —

(५) जब 'ख़' ने दिल्ली के लिए टिकट खरीदा तो 'क' ने उसका पीछा किया और उसी डिब्बे में एक सीट रिज़र्व करा ली।

यदि घटना नम्बर (३) पहिले ही जात नहीं होती तो इस नयी घटना से बादी के कथन की सचाई में विश्वास बहुत वढ जाता। परन्तु घटना नम्बर (३) कैसिब्द होने के पश्चात् इसका महत्त्व पहिले की अपेक्षा बहुत कम ही जाता है। फिर भी यदि हम घटना नम्बर (४) पर विचार करें तो घटना नम्बर (३) के सिब्द होने के पस्चात भी इससे बादी के कथन को काफी वळ मिल्ला है।

§ ५ ४ यदि नवीन साक्ष्य विश्वसतीय पूर्वजात घटनाओं से बहुत अधिक समित हो तो साक्ष्य में हमें अधिक समित होगा । परन्तु इस साक्ष्य से हमार विश्वसतों में अलदर नहीं पहला। और पर्वि पहला भी है तो अधिक नहीं । हसके विपरोत्त पित यह निमी ताक्ष्य पूर्व काल घटनाओं से एकदम अस्वपित हो तो यह हमारे पूर्व निश्चित विषयों निमी ताक्ष्य पूर्व काल घटनाओं से एकदम अस्वपित हो तो यह हमारे पूर्व निश्चित विषयों निमी ताक्ष्य पूर्व काल घटनाओं से एकदम अस्वपित हो तो यह हमारे पूर्व निश्चित विषयों निमी ताक्ष्य पूर्व काल पर्वा ता है।

मनुष्य का भित्तप्क प्राय इसी प्रकार कार्य करता है। यह ऐसा क्यो करता है? यह ऐसा प्रश्न है जिसकी इस पुस्तक में चर्ची करना उचित प्रतीत नही होता। इस कार्य के लिए कदाचित् कोई मनोनेनानिक हो सबसे अधिक उपयुक्त है। बिल्क हमें विस्वास है कि उसे भ्रमका उसका मितिया में इसका उत्तर देने में बहुत कठिनाई पड़ेगी। मनवत उसका मितिया के इसी प्रकार कार्य करता है और वह हमें इस समस्या के अपने हल के बारे में इसी प्रकार कार्य करता है और वह हमें इस समस्या के अपने हल के बारे में विस्वास दिलाने के लिए जो यूनिया प्रयोग करेगा। इसके बलावा हम इस बात की भी चर्चा नहीं करने कि इस सिद्धान्तों का प्रयोग करेगा। इसके बलावा हम इस बात की भी चर्चा नहीं करने कि इस सिद्धान्तों का प्रयोग

कहीं तब युनिवयुक्त है। यह असभव है वि इस अकार का कोई भी तक यूढ और जांदिल न हो जायो। विभिन्न व्यक्तियों की भिन्न-भिन्न राय हो सकती है। समसे कठिन समस्या तो यह निक्ष्मय करने की है कि युनितयुक्त आपरण क्या है। सास्तिकों की एक युन्तक का लेखक, जो अपने परिहासशील स्वभाव के लिए जा भी महित नहीं है स्वयं जो एक गम्भीर वेजानिक माना जाता है, युनितयुक्त आपरण की परिमाप देते हुए छित्तता है कि यह वह आपरण है जिसे वह लेखक युनितयुक्त समझता है। यद्यिष इस प्रकार की कोई भी परिमापा बिलवुल भी युनितम्मत जात नहीं होतो तवायि यह हो सकता है कि गठकों का बहुमत इस लेखक के साथ हो। इस परिभाषा के बारे में ही नहीं किन्यु इस बारे में भी कि निर्मय किन्न प्रकार किया जाये और निक्य कैंसे निकाला जाये।

§ ५ ५ हमने ऊपर यह दिखलाया है कि मानव मस्तिष्क किसी कथन के अनुमौदन में अयदा उसके विपरीत शाध्य को किस प्रकार तौलता है। प्राय ऐसी ही बात उस समय भी द्वियोचर होती है जब कथन का निप्कर्य क्षठ या वस्त दो नहीं सिद्ध होता, परन्तु निष्कर्य असभाव्य (amprobable) मालूम होता है। कई लोगो का, जो सिनेमा को बहुत आलोचनारमक इध्टिकोण से देखते है, यह मत है कि भारतीय चित्रों में क्या, घटना-चक्र, काल और बातावरण बनावटी तथा वास्तुविकता से बहुत दूर होता है । मनच्यो का जो आचरण और व्यवहार उसमें दिखाया जाता है वह प्राय अस्वाभाविक होता है। उदाहरण के लिए अभिनेता का कोड़ो द्वारा पीटे जाने और भयकर पीड़ा दिये जाने पर गाना अथवा अभिनेत्री का अपनी माँ की मृत्यु पर आंसू बहाने के साथ साथ मीत गाना। स्त्रियों को ऐसे दस्त्र पहने हुए दिलाया जाता है जि जो पहले कभी नहीं देखें गये यद्यपि जित्र के पश्चात उनका माफी जलन हो सकता है। एक पढे लिखे सभान्त व्यक्ति को सडको पर नाचता और गाता हुआ दिखाया जाता है । इन सभी दशाओं में आलोचनात्मक दृष्टिकोणवाले व्यक्तिया का यह विचारहोता है कि यह सब बनावटी और अस्वाभाविक है । जब कोई यह महता है कि कोई आचरण या घटना अस्वाभाविक है तब इसके अर्थ यही होते है कि साधारण-तया कोई मनुष्य इस रारह की घटनाओं की अयवा आचरण की आशा नहीं करता । यदि चित्र में ये दिखाये जाते है हो आपके मन में बरावर यही विचार आयेगा कि वास्तविक जीवन में ऐसा कभी नहीं हो सकता । यहां तक कि यदि निर्माता चित्र के आरम्भ में यह भीषणा भी कर दे कि चित्र के पात्र और घटनाएँ बास्तविक जीवन से ही ही गयी है तब भी आपको विश्वास नही होगा।

आखिर ऐसा नयो ? क्या यह असमव है कि कोई लड़की अपनी माँ के मरने पर एक दु स भरा गीत गाये ? मुझे तो यह असभव नही मारूम पडता यद्यपि किसी भी लड़की से इस प्रकार के आचरण की कोई भी आशा नहीं रखता। दूसरे इस प्रकार के आचरण की सभावना भी बहुत कम है । यदि आप इसे प्रायिकता की भाषा मे व्यक्त करना चाहुँ तो कह सकते हैं कि इस घटना की प्रायिकता बहुत कम है। यद्यपि इस प्राधिकता का ठीक-ठीक भान अथवा अनुमान किसी की भी नहीं मालूम होता । लेकिन यदि हम यह कहें कि प्रायिकता दस सहस्र में एक से कम है तो कदाचित् भूल नहीं होगी। जब हमें कोई कभी ऐसी घटना का वर्षन सुनाता है जिसकी प्रायिकता बहुत कम हो तो प्रस पर हमें सहज ही पिश्यास नही हो जाता ।

मान लीजिए कि कोई व्यक्ति एक ऊँचे मकान की छत से सहक पर कूद पडता है। साधारणतया हम यह अपेक्षा करते हैं कि यदि वह व्यक्ति भरने से बच भी गया तो बुरी तरह आहत तो अवस्य ही होगा । यदि किसी चित्र में यह दिखाया जाय कि एक लडका इस प्रकार कृदता है और आहिस्ता से सडक पर जाकर भीड़ में मिल जाता है जहाँ कोई इस बात पर ध्यान भी नही देता तो कवाचित दर्शको का इस वृश्य से मनोविनोद तो अवश्य होगा, परन्तु कोई भी गभीरतापूर्वक ऐसी घटना के बास्तविक जीवन में घटने की कल्पना नहीं कर सकेगा।

अब मही घटना यदि सिनेमा में नही दिखाई जाती बल्कि एक ऐसे व्यक्ति द्वारा भापको सुनाई जाती जिसकी ईमानदारी में आपको पूरा भरोसा है और यदि वह यह कहता कि उसने यह घटना स्वय देखी है तो आप पर इसका क्या प्रभाव पडता? शायद शुरू में आप सोपते कि उस व्यक्ति को कुछ घोला हुआ हो, परन्तु यदि वह बहुत विलपूर्वक अपने कयन का समर्यन करे और उसके मस्तिष्क के सतुलन और वैज्ञानिक प्रैक्षण की आदत से आप परिचित हो तो आपको उसकी बात का विश्वास करना होगा । आपको आक्तर्य तो अवस्य होगा परन्तु आप यही सोचेंगे कि एक बहुत ही विचित्र घटना घटी ।

न्या कारण है कि एक ही घटना के विलकुल एक ही प्रकार के शब्दों के दो भिन्न व्यक्तियों द्वारा दिये गये वर्णनों की इतनी विभिन्न प्रतिक्रिया होती है ? पहले व्यक्ति ने बारे में आप जानते हैं कि उसे विचित्र बातें गढ कर सुनाने का शौक है या झूठ बोलने में उसे कोई हिचकिचाहर नही होती । इस दशा में यदि वह किसी अनहोनी घरना का पेर्णन करता है तब आप मही समझते हैं कि यह गप्प रंगा रहा है। दूसरे व्यक्ति के बारे में आप यह जानते हैं कि वह अपने जीवन में आज तब झूठ बोला ही नहीं । ऐसी

बसा में आपको यह समय न मालूम होगा कि आज वह बिना कारण आपसे मूठ वीज रहा है। अब दो घटनाएँ हैं और दोना ही की प्रामिकताएँ बहुत कम है। एक दो यह मटना है कि एक रूडका पर की तीहरी मिलल से मार्ट में वह सहक पर बिना किसी हुपेटना के और बिना किसी का ब्यान आकर्षित किये कूद जाता है और दूसरी घटना यह है कि एक मनुष्य जिवने बाज तक जुठ नही को लाज जिता कारण सुठ बोठ रही है। यदि इन दो घटनाओं की प्रामिकता को तुक्ता करने पर—व्यापि हमारे पास इन प्रामिकताओं का सही पान प्राप्त करने का कीई तरीका नही है परन्तु केवल वव- विता मने में ही यह तुक्ता समय है—आप यह तम करते हैं कि उस मनुष्य को दिव की समयवा इस मनुस्य का विश्व की की समयवान इस मनहींनी पटना से भी कम है तब बापको उस मनुष्य का विश्व सह हो जावेगा, और आप नहीं ने पटना से भी कम है तब बापको उस मनुष्य का विश्व सह हो जावेगा, और आप नहीं ने पटना से भी कम है तब का वापको उस मनुष्य का विश्व सह से नी विश्व पटना से भी कम है तब अपने उस सन्ता की

इस मारे विवाद का सारपर्य यह है कि ऐसी घटनाओं में किसी को सहज ही विश्वास नहीं होगा जिनकी प्राप्तिकता बहुत कम होंगी है। यदि किसी कमन से कुछ ऐसा निष्कर्य निकलना हो जिसके होंगे को समावना बहुत कम हो तो पहिल्ल सो हम यह तम करते हैं कि निष्कर्य सरस मही हो सकता, नयोंकि इसकी प्राप्तिकता होत कम है। इस निष्कर्य को असल्य मानने का स्वाप्ताविक परिणाम होता है कि हम उस कमन को भी असल्य मान केते हैं जिससे इस विचित्र और अधिकस्तरीय निष्कर्य का प्रमुख्य था।

ई ५ ६ यही यह मनौवैज्ञानिक पृष्टमृत्रि है जिस पर परिकरनमें की जीव का सांख्यकीम (सिद्धान्य (Statistical theory of testing of hypothesis) आयारित है। इन प्रकार के मनौवैज्ञानिक आवरण को जो एक सांचारण मनुष्य के लिए स्वामारिक है और जिसके लिए वह कियी प्रकार के होमले-विचार के जी आवर्षकता मही समर्वता, सांख्यिकी के विज्ञानों ने तक द्वारा यूक्ति-समत दहराया है। मान जीजिय कि उन सब बदनायों को जनकी प्राधिकता एक प्रतिकात या उससे कम हो इस असभव समत के और ऐसी पदमायों से स्वविक्त कमन को हा या परकत समत के और ऐसी पदमायों से स्वविक्त कमन को हा या परकत समत हो होंगी। यहिं कि निक्त मान के मानत होने की प्राधिकता भी एक प्रतिवात से कम हो होगी। यहिं किन वास्तर में सुद्ध है वो हमारा निकल्य सम्बद्ध ही है। और यहिं कमन सल्य है ती हमारे किन वास्तर में सुद्ध है वो हमारा निकल्य सम्बद्ध ही है। और यहिं कमन सल्य है ती हमारा निकल्य सम्बद्ध ही है। और यहिं कमन सल्य है ती हमारा निकल्य सम्बद्ध ही है कि उस पटना की प्राधिकता एक प्राधिक कम हो, हमिल एस प्रदान की स्वाप्त स्वाप्त के स्वाप्त हो हमारा के हम हो हमिल प्रधान के स्वाप्त के स्वाप्त के स्वाप्त के स्वाप्त के स्वाप्त की स्वाप्त स्वाप्त के स्वाप्त की स्वाप्त स्वाप्त के स्वाप्त की स्वप्त स्वाप्त की स्वाप्त के स्वाप्त की स्वाप्त स्वाप्त की स्वाप्त स्वाप्त स्वाप्त की स्वप्त स्वाप्त से स्वप्त हो होने स्वाप्त के स्वाप्त की स्वाप्त स्वाप्त से स्वप्त से स्वप्त से स्वप्त हो होने से इस इंटिकोंग का विवास हम अवले अध्यायों में करियं जिसमें कुछ विन्तार से इस प्रकार की मुनित

और दर्शन पर विचार होगा । यहाँ तो हम केवल सास्थिकीय पद्धति से जीच के कुछ उदाहरण देंगे और ऐसे प्राधिकता बटनो का परिचय करायेंगे जो बहुत महत्त्वपूर्ण और उपयोगी हैं।

९५७ मान लीजिए कि एक रोग है जियसे पीडित अधिकतर रोगी मृत्यु का निकार हो जाते हैं। वैज्ञानिक जवस्य ही ऐसे रोग के इलाज के लिए औपझ को खोज में सलन होगे। जनको यह पता है कि—

(१) इस रोग से पीडित सभी व्यक्ति मही मर जाते। कुछ ठीक भी हो जाते हैं।

(२) किसी भी औपध से सब रोगी ठीक नहीं हो जाते।

(३) यद्यपि किसी विवेष औषध से वह विवेष रोग ठीक ही जाये जिसके लिए वह बीपध दी गयी थी तथापि यह समय है कि रोगी को अन्य कोई रोग भी हो और अपिध का ठीक प्रभाव होते हुए भी वह सर जाये।

इस दता में यदि उस अध्यय के उपयोग से मृतको के अनुपात में कभी हो सके और वह पुराने उच्च रता से नीने उतार आये तो यह सचयुष्य ही प्रपति का सूचक है। नयीन औपक का उपयोग वास्तव में ठीक दिया में प्रभाव डाल रहा है अथवा नही यह मिर्णय करने के लिए यह जानने की आवर्यकता है कि जिस समय कोई औषण नहीं दो जाती थी उस समय रोमियों में मरनेवालों का अनुपात क्या था तया इस औपक के देने से इस अनुपत में बात करने की साम करने की स्वाप्त क्या था तथा इस औषक के देने से इस अनुपत में बात करने में करना की साम करने हों।

करपना कीजिए कि सैकडो डाक्टरो के अनुभव के आधार पर, जिन्होंने इस रोग में पीडित हुजारों व्यक्तियों को देखा है, हमें यह ज्ञात है कि इस प्रकार के रोगियों में मुक्त-अनुपात २०% है। अब जिस नथी औपम से इस रोग के इलाज में प्रगति की आधा को जाती है उसका प्रयोग हम अनियमित अथवा यावृष्टिक रूप में चुने हुए सी रोगियों घर करते हैं। यदि हमारा प्रतिवर्द्ध (sample) कुल रोगियों का सच्चा प्रतिवर्ध के अभेर उनके रोग भी दक्ष प्रजाप की लिए रोगियों को उस और उनके रोग भी दक्ष प्रजाप की स्वाह में और इस प्रतिवर्ध में समान अनुपात में है—और यदि इस नयी औपम से कुछ लाम नहीं होता तो इन सी रोगियों में से २० की मृत्यू की बादाका है। या तो २० की ही मृत्यू होगी या ययोग से कुछ कम या अधिक व्यक्ति भी मर सकते हैं। यदि इस मान ठिया जायें कि औपम का प्रचाद रोग पर कुछ भी नहीं होता तो रोगियों में से केनळ दक्ष गर्न की शियाता तितरी हैं ?

यदि यह प्रायिकता इतनी काफी है कि सयोग से ऐसी घटना होने पर हमे फुछ भी आरचर्य नहीं होगा तो हम यही कह सकते हैं कि कदाचित् इस औपन का कुछ गुण- कारी प्रमाय इस रोय पर पडता हो, परनु इम प्रयोग से जो एक सी रोगियो पर किया गया यह दाना सिद्ध सही होता। इसके बारे में अधिक निहित्तत होने के लिए हमें प्रतिदर्ध को और भी वडा करने की आवस्त्रकार है। इस प्रमाय की मनोवेज्ञानिक प्रतिक्रिया को हम आयार रकते हैं बमोकि यह कथन कि इस अधिष से कुछ लाम नहीं होता जती समय झूटा माना जायगा जब के प्रेसित मृत्यु-बुस्मा की प्राधिनता उभर लिली हुई परि-कल्यना के आधार पर बहुत हो कम निकले। यदि यह प्राधिकता काफी नडी हो तो को के स्वाधिन स्

इनके पूर्व कि हम यह कह सकें कि क्या सक्या आप सभव है और क्यानहीं, हमें यह बात होना चाहिए कि प्राधिकता की गणना केंग्ने की आये । मिन्न-मिन्न मृत्यु-मक्याओं की प्राधिकना हमें मालूम होनी चाहिए । यदि चिकत्वा से कुछ लाम नहीं होता तो रोगियों में मृत्यु को आप्त होनेवाणों का अनुपात २०% होना चाहिए । मिन्न-मिन्न सक्या के मितवाों में इस अनुपात में कड़ी तक अतर पड सकता है ?

यदि हम केवल एक रोगी पर प्रयोग करके देखते हैं तो दो घटनाफों की नजावना है, या तो वह ठीक हो जावेगा या उसकी मृत्यु हो जावेगी। पहली दशा में प्रतिवर्धों में मृतकों का अतुपात गृत्य अतिवात है जब कि दूसरी बदा में यह अनुपात शत प्रतिवर्धों में मृतकों का अतुपात गृत्य अतिवात है जब कि दूसरी बदा में यह अनुपात शत प्रतिवात है। या पहली दशा में यह अनुपात से शांप अतिवात है। यो २०% है। बहुत कम होगा। परत्यु यह हस बता का कोई प्रमाण नहीं है कि औषध बात्य में मृगकारी है। बिना इस औपथ के भी ८०% लोग ठीक हो ही जाते थे और मिद यह विशेष रोगी ठीक हो जाता है तो इसमें आस्वर्ध में कोई बात नहीं। इसी प्रकार रोगों के मरने पर बहु कहा भी ठीक मही कि इस ओषध से कुछ भी लाभ नहीं होता या इससे हार्गि हो हो है। इस प्रकार यह मालूस होता है कि केवल एक रोगों पर प्रयोग करके हार्गि कि निर्वेद गत गत पर नहीं पहुंच सकते। इसने लिए हमें अधिक रोगियों पर परीक्षण करता आवत्यक है।

अब यदि दो रोजियो पर प्रयोग किया जाने तो निम्न तीन घटनाओं की सभावना है--

- (१) दोनों रोगी मर जायें।
- (२) एक रोगी मर जाये और एक ठीक हो जाये।

(३) दोनो रोगी ठीक हो जायें।

यदि और व का कुछ प्रभाव न हो तो एक रोगी के मरते की प्राधिकता $P(A) = \frac{2}{160} = \frac{1}{6}$ है और उसके ठीक हो जाने की प्राधिकता $P(B) = \frac{9}{100} = \frac{4}{5}$ है । इसी प्रकार दूसरे रोगी के मरते की प्राधिकता भी $\frac{1}{6}$ है । यह युक्तिसगत माना जा सकता है कि एक रोगी की मृत्यु का दूसरे रोगी के ठीक होने से या उसकी मृत्यु होने से कुछ भी सबय नहीं है। अर्थान्ये में सोने प्रचलता है की स्थान से सीने प्रकार की स्थान से सीने प्रकार की प्राधिकता

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

यदि रोगियों को 'क' और 'ख' से सुचित किया जाये तो इस घटना की प्रायिकता कि 'क' मर जाये और 'ख' ठीक हो जाये $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} b$ है। इसी प्रकार 'क' के ठीक हो जाते जोर 'ख' के सरते की प्रायिकता $\frac{4}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} b$ है। इस दूसरी घटका— कि एक रोगों नर जाये और एक ठीक हो जाये—की प्रायिकता ऊपर जिज्जी दोनों सपत्रजीं घटनाओं (exclusive events) को प्रायिकताओं के योग से प्राप्त होंगी। जयति इस घटना जी प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है।

दोनो रोगियो के ठीक हो जाने को प्रायिकता $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \xi$ है। हम इन प्रायिकताओं को एक सारिणी के रूप में निम्न तारीके से रख सकते है।

सारणी संख्या 5.1

घटना	घटना की प्रायिकता	मृतक अनुपात%
I	2	3
दोनो रोगियो की मृत्यू	3,2 T	100
एक की मृत्यु और एक का आरोग्य लाग	32	50
दोनों का आरोग्य-लाभ	16	0

इन तीनो घटनाओं में से केवल एक ही ऐंगी है जिससे प्राधिकता इतनी कप है कि इस परिकरपाम से सदेह हो जाता है कि औषध का कुछ भी प्रभाव नहीं पडता। यह नह भटना है अब दोनों रोगियों की मृत्यु हो जाती है। परन्तु यदि ऐसी दुर्घटना हो जायें दो यह विकास हो बक्ता है कि औषय हानि-कारक है। दोनों रोगियों का ठीन हो। जाना ही एन ऐसी घटना है जिसमें प्रतिदर्ध में मृतक अनुमात अपेक्षित अनुमात से २०% कम है तथा जो इस बात का प्रोमक हो सकती है कि औपम छाभदामक है। पट्सु यदि औपम का कुछ औप्रमान न पढे तब भी इस घटना की प्राप्तिका ½8—64% इतनी अभिन है कि इससे स्कृष्ट भी निकल्प निकालना अवस्थ है।

यह स्पष्ट है कि प्रतिवृद्ध में रोगियों की मह्या बाहे जितनी हो। यदि सभी रोगी आरोध लाभ कर ले तो भूतक-अनुपात प्रतिवृद्ध में चून्य प्रतिवृद्ध होगा। श्रीपम का कुछ भी प्रभाव नहीं होता। इस परिकल्पना के आधार पर परिकल्जि इस घटना की प्रायक्तता यदि इतनी आंचक है कि औपम के गुणवारी प्रभाव का विद्यास दिलाने में यह असमय है तो कोई भी अन्य घटना जियम कुछ व्यक्ति पर जाते हैं और जुछ व्यक्तियों को लाभ हो जाता है यह विश्ववाद दिला ही नहीं सक्ती कि औषम से इस रोग में लाभ होता है। इस्रोल्ए इतने छोटे प्रतिवृद्ध का प्रथान करना बेकार है।

आहए, पहुले हम यह मालूम करें कि प्रतिदत्त में रोगियों की सहया कम से कम कितनी होनी चाहिए कि उससे औषय के गुणकारी प्रभाव का विश्वास दिलाने की समावना ही रहे। इसमें हमें ऐसी सच्या का पता लगाना है कि सब रोगियों के बारोग्य लगा को प्रायंक्तता बहुत कम हो। इतनी कम कि लोगों को विश्वास नहीं कि दिया औषाव-मान के ऐसी पटना घट सकती है। नीचे सारणी में कुछ प्रतिवस सस्याएँ और तस्ययों सभी दें। गीचे सारणी में कुछ प्रतिवस सस्याएँ और तस्ययों सभी रोगियों के आरोग्य लगा की प्रायंक्तता दें। गीचे हैं।

सारणी सख्या 52

01(4) 0(4) 52			
प्रतिदर्श-मस्या	सभी रोगियों के आरोग्य लाभ की प्रायिकता		
(I)	(2)		
3	$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{64}{125} = 0.512$		
4	$\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625} = 0.4096$		
5	$\left(\frac{4}{5}\right)^6 = \frac{10.28}{3125} = 0.32768$		
10	$\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = = 0.1074$		
100	$\left(\frac{4}{5}\right)^{100} = = 0.000,000.000,200$		

प्रतिदर्श सस्या दस तक सभी रोगियों के आरोम्य-काम नी प्रायिनका बिना शीपय के प्रभाव के भी इतनी है कि यह शीपय के छामकारी होने में विश्वसा दिछाने के लिए यमेप्ट नहीं है। सायद हमें उस समय तक विश्वसास मही ही सकेगा जब तक इस पटना की प्रायिवना ५% ते कम न हो। प्रतिदर्श सस्या सी में इस घटना की प्रायिकता इतनी मन है—अपों एक अरब में हो—कि यदि वास्तव में यह घटना घटित हो जाय तो हमें पूरा भरीसा हो जायाता कि यह जीयव रोग की चिकित्सा में चमरकारी है।

आपको बाद होगा कि हमने उदाहरण मी रोगियों के प्रतिदत्त से आरभ किया था जिसमें दत रोगियों को मृत्यु हुई थी। प्रदम यह है कि विद जीपय का कुछ भी प्रभाव नहीं होता तो ऐसी घटना कहाँ तक समय थी। हम दस अववा दस के कम मृत्यु की प्रतिकार का प्रतिकार

सारणी सख्या 53

घटना	घटना की प्रायिकता	मृतक-अनुपात प्रतिशत
I	2	3
100 रोगियो को आरोग्य-लाभ	(4)100	o
99 को आराग्य-लाभ व १ की मृत्यु	$\left(\frac{4}{5}\right)^{89} \left(\frac{1}{5}\right) \times 100$	I
98 को आरोग्य लाभ व २ की मृत्यु	$\left(\frac{4}{5}\right)^{98} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{100}{2}\right)$	2
97 को आरोग्य-छाभ व ३ की मृत्यु	$\left(\frac{4}{5}\right)^{87}\left(\frac{1}{5}\right)^3\times \left(\frac{100}{3}\right)$	3
96 को आरोग्य-लाम व ४ की मृत्यु	$\left(\frac{4}{5}\right)^{96} \left(\frac{1}{5}\right)^4 \times \left(\frac{100}{4}\right)$	4

घटना	घटना की प्रायिक्ता	मृतक-अनुपात प्रतिशत
I	2	3
95 को आरोग्य-लाभ व 5 की मृत्यु	() () ()	5
94 को आरोग्य लाभ व 6 को मृत्यु	$\left(\frac{4}{5}\right)^{61}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\binom{100}{6}$	б
93 को आरोग्य-लाभ व 7 की मृत्यु	$\left(\frac{4}{5}\right)^{33}$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{7}$ $\left(\frac{1}{7}\right)^{9}$	7
92 को आरोग्य-लाभ व 8 की मृत्यु	$\left(\frac{4}{5}\right)^{32} \left(\frac{1}{5}\right)^{6} \left(\frac{1 \oplus 0}{6}\right)$	8
9ा को आरोग्य-काभ व 9 की मृत्यु	$\left[\left(\frac{4}{5} \right)^{91} \left(\frac{1}{5} \right)^{9} \left(\begin{array}{c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \end{array} \right) \right]$	9
90 को आरोग्य-लाभ व 10 की मृत्यु	$\left(\frac{4}{5}\right)^{90}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{100}{10}\right)$	10

यह कह सकते हैं कि यदि हम भी-यो रोगिया के यस वहल प्रतिदर्गों का अवलोक्त करें तो केवल 57 में ही यम अववा उनसे कम मृत्यु मह्या होगो । इस प्रकार के प्रयोग-फ र से यह घारणा वननी है कि यह औषघ लाभदायक है ।

सारमी 53 में दो हुई म्यारह घटनाआ की प्रांमिक्ताओं की गणना हमने किम प्रकार की ? पहली घटना में तो यह गणना बहुत हो मरल है। सो घटनाएँ है जिनमें से हर एक की प्रायिकता (ई) है और वे एक इसरे से स्वतन है। इसलिए इस सब पदनाओं के होने की प्रायिकता उनको जिन जिन प्रायिकताओं का गुणन अर्थात् (ई) 100 है।

दूसरी घटना के लिए मान लेजिए नि एक नियोग रोगी A_1 दो मर जाता है और लग्म सब रोगी आरोग्य-लाभ करते हैं। इस घटना को आविकता $\{\frac{1}{2}\}^{99} \times \{\frac{1}{2}\}$ है। जब हम पदि हमी प्रकार की एक जन्म घटना की आविकता का कलन करें जिसमें एक जन्म रोगि A_2 तो गर जाता है और जन्म रोगियों को आरोग्य लगम होता है ती वह भी $(\frac{1}{6})^{99} \times (\frac{1}{3})$ होगी । कीन सा विद्येप रोगी गरजा है इस पर निगर फुल एक गी घटनाएँ है जिनकी आविकताएँ $(\frac{1}{2})^{99} \times (\frac{1}{3})$ हैं। इसलिए इनमें से होनी शरान के होने की—भी में से निस्ती एक रोगी के मरने की—भी प्रकार $(\frac{1}{2})^{99} \times (\frac{1}{3})^{99} \times (\frac{1}{3})$

का क्लन किया जा सकता है।

इसी प्रकार मान लीजिए कि दो विश्वेप रोमी A_1 और A_2 तो भर जाते हैं तथा जन्म वर ठीक हो जाते हैं । इस घटना की प्राणिकता $(\frac{1}{2})^n \times (\frac{1}{6})^2$ है । हम यह भी जानते हैं कि तो रोगियों में से दो रोगियों के $(^12^0)$ कुलक (sets) बनाये जा सकते हैं । इनमें में यदि किसी विश्वेप कुलक के रोगी मर जाये तथा अन्य सकते सारोग्य-राम हो वो इसकी प्राणिकता, जैसे हम ऊपर देख चुने हैं, $(\frac{1}{2})^n \times (\frac{1}{3})^n$ हैं । इसिंग्ट कुल प्राणिकता कि कोई भी दो रोगी मर जाये और अन्य आरोग्य-लाभ करें $(\frac{1}{2})^n \times (\frac{1}{3})^n$ हैं। इसिंग्ट कुल प्राणिकता कि कोई भी दो रोगी मर जाये और अन्य आरोग्य-लाभ करें $(\frac{1}{2})^n \times (\frac{1}{2})^n \times (\frac{1}{2})^n$ हैं । इसीं प्रकार के तर्क से अन्य सब प्राणिकताओं

अध्याय ६

द्विपद वंदन (Binomial Distribution)

६६१ द्विपद वटन

पिछले अध्यास के अन्त में दी हुई प्रासिकताओं के गणन का एक ध्यापक प्रम है जिसको चतुर पाठक कराचित् अब तक साल्म भी कर चुका होता । मान लीजिए कि एक सान्धिक प्रयोग (tandom experiment) के दो ही फल हो सकते हैं A और A' जिनमें A की प्राधिकता p है और A' की प्राधिकता x-p = q है । सिंद स साद्धिक प्रयोग को N बार दो हराया जासे ता द स घरना की प्राधिकता कि n बार A औ N-n बार A' चिंदत हो $\binom{N}{n}p^n \binom{N-n}{q}$ है । प्रसोग को N बार दुहरान से जितनी वार A घटिन हो वह सक्या एक साद्धिक चर है । इस सर का मान n होने की प्राधिकता $\binom{N}{n}p^n \binom{N-n}{q}$ है । मही हनारे प्रादिक्छन चर का बटन है ।

यह बटन द्विपर बटन के नाम से विरयात है। इसका कारण यह है कि A के घटने की भिन्न निम्न सब्याओं की प्रायिनताएँ $(p+q)^N$ के द्विपर निस्तार से प्राप्त हीती है। $(p+q)^N$ का द्विपर विस्तार निम्नाळिखित है— $(p+q)^N = \stackrel{N}{q} + \binom{N}{1} \stackrel{N}{q} \stackrel{N}{p} + \binom{N}{N} \stackrel{N}{q} \stackrel{P}{p} \stackrel{N}{p} + + \binom{N}{n} \stackrel{N}{q} \stackrel{N}{p} \stackrel{N}{p} \stackrel{N}{p} + + \binom{N}{N-2} \stackrel{N}{q} \stackrel{Q}{p} \stackrel{N}{p} \stackrel{N}{p} + + \binom{N}{N-1} \stackrel{N}{q} \stackrel{N}{p} \stackrel{N}{p} \stackrel{N}{p} + \binom{N}{N-1} \stackrel{N}{p} \stackrel{N}{p} \stackrel{N}{p} \stackrel{N}{p} + \binom{N}{N-2} \stackrel{N}{p} \stackrel{N}$

इस बहुत ही महत्त्वपूर्ण और साघारण द्विपद वटन के कुछ और उदाहरणो पर अव हम विचार करेंने।

६ ६[.]२ द्विपद बंटन के उपयोग के कुछ उदाहरण

(१) प्राय सभी पाठक इस कहावत से परिचित होंगे कि "भूल करना मनुष्य का स्वभाव है।" कुशल से कुशल व्यक्ति भी कही न कही बुटि कर ही बैठते हैं। वे इसी अर्थ में कुझल माने जाने हैं कि नौसिखियों की अपेक्षा उनकी त्रिटियों की बारबारता बहुत कम होती है। एक टाइपिस्ट का विचार कीजिए-चाहे उसे टकन (type) करते हुए दस वर्ष वीत गये हो, पर यह असमन है कि टक्न करने में उसकी कभी पूटि नहीं होती। विशेष रूप से विचार करने के लिए मान लीजिए कि किमी एक पुष्ठ पर कम से कम पुटि होने की प्रायिकता पच्चीस प्रतिशत है--अर्थात् यदि हम टकन किये हुए अनेक पृष्ठों की परीक्षा करें तो उनमें लगभग एक चौयाई में एक या अधिक त्रटियाँ होगी । जब यदि यह दशा एक अनभव-बील टाइपिस्ट की है तो नये व्यक्ति से इससे कम प्रदियां करने की आजा करना व्यथं है। यदि यह अनभवशील टाइपिस्ट नौकरी छोड कर जा रहा हो और मैनेजर को नये आदमी की नियक्ति करनी हो तो वह यह जानना चाहैगा कि प्रार्थी की योग्यता लगभग उस व्यक्ति के बरावर है या नहीं जो नौकरी छोड़ रहा है। यदि वह अधिक योग्य हो या लगभग बराबर योग्यता रखता हो तो नौकरी देने में कुछ आपत्ति नही होनी चाहिए। परन्त यदि उसकी योग्यता बहुत कम है तो अधिक बुटियाँ होने के कारण काम का समय अधिक नष्ट होगा। यह जानने के लिए कि प्रार्थी की योग्यता कितनी है-एक ही तरीका है—वह यह कि उससे टकन करवा कर परीक्षा ली जाये । मान लीजिए कि परीक्षा के लिए टाइपिस्ट को चालीस पूछ टकन के लिए दिये जाते है। परि-कल्पना यह है कि प्रार्थी औसतन उस व्यक्ति से अधिक बृदि नहीं करता जो नौकरी छोडकर जा रहा है। इस आधार पर हमें प्रयोग मे प्रेक्षित त्रटियों की सख्या के बराबर और उनसे अधिक त्रृटियों की प्रायिकता की गणना करना है।

यदि इस प्रयोग में दस से कम पृष्ठों में ही तुटि पायी जाती है तो स्पन्दत टकन एस श्रीदत मान से अदेसाकृत अधिक अच्छा है जिसकी हम आया करते थे। तब तो हमें प्रांतकता कम करन करने की कोई आवदयकता नहीं है। यह आवस्यकता उसी समय पढ़ेगी जब परिणाम औसत से सराब हो। आइये, हम देखें कि एक ऐसे प्रार्थी के बारे में मैनेजर का बया निर्णय होना चाहिए वो इस प्रयोग में 13 पृष्ठों को तुटियों के कारण विशाद देता है।

यदि आप मैनेजर है तो आप यह तो देखेंगे ही कि परिणाम आशा से खराव है, परन्तु आप यह भी जानते हैं कि ऐसा भेवल संयोग से होना भी समव है, यदि २५% पर मुटिया की परिकल्पना पर आघारित प्राधिकता तेरह पृष्ठों पर भूलों के लिए काफी है हो त्यायरील होने के नावें आप प्रार्थीं को असफल घोषित करना ठीक नहीं समझँगें । सायद आप उसकी परीक्षा नो और कबा दें तथा उसे कुछ अधिक पृष्ट टाइप करने को हैं ग्रिससे ब्राप अधिक ति सचीच होकर निर्मेष कर सुकें।

आइये, अब चारीस पृष्ठों में से तेयह अथवा तेयह से अधिक पर जुटियाँ होने की प्राधिकता की गणना की जाये । इसमें हमें बद्ठाडस भिन्न भिन्न भागिकताओं की गणना करके उनका योग करना होगा। परन्तु हम इसी को एक दूबरे उन से भी हल कर सकते हैं जिसमें मेहनत कम हो।

P (चालीस में से तरह अथवा उससे भी अधिक पृष्ठो पर नुदियाँ होना)

■1—P (वालीस में से बारह अपना उससे भी कम पृथ्दो पर नृटियाँ होता) अब बारह अवचा उससे भी कम पृथ्वो पर नृटियाँ होते की प्राधिदता का करने करते के लिए केवल तेरह आरिमन घटनाआ की प्राधिदताओं का कलन करते और उपकारों में के ली के ली होते ही हैं। उस पाया आप के पुळ की सारणी में दी हुँ हैं।

इसलिए बारह अथवा इससे कम मृटिया के होने की कुल प्राधिकता

$$= \frac{3^{28}}{4^{40}} \left\{ \binom{40}{12} + 3\binom{40}{31} + 3^2\binom{40}{10} + \dots + 3^{12} \right\}$$

= 0.8208658

. तरह अथवा तेरह ने अधिक चुटियो की प्रायिकता

= 1-0 8208658

= 0 1791342

इस प्रकार हम देखते हैं कि "किसी पृट्ठ पर नृटि होने की प्राप्तिका पत्र्वीस प्रतिज्ञत अर्थात 0.25 हैं 'ऐंगी परिलल्पना के आधार पर प्रयोग के फल की प्राप्तिकता इतनी कम नहीं है कि हम परिकल्पना को त्यागने के लिए बाध्य हो जायें और हमारा यह दिवसा हो जायें कि प्रार्थों के लिए किसी पृट्ठ पर गृटि होने नी प्राय्तिकता अवस्य पत्रचीत प्रतिवात के जधिक होगी। इस देशा में मैनजर उसे नियुक्त करना अनुवित नहीं समसीगा।

(२) द्वित्तव बटन का उपयोग केवल औपिक्या के गुण की परीक्षा अथवा नौकरी के लिए उपयुक्त व्यक्तियों के चुनाव तक ही सीमित नही है। शायद इसका सबसे अधिक उपयोग व्यापार में माल के स्वीकार अथवा अस्वीकार करने में होता है। पुस्तक के अरस्म में ही हम यह देख खुके है कि साधारणतवा मनुष्य प्रतिदर्श के आधार पर ही

सारणी सस्या 61

घटना	प्राधिकता
(1)	(2)
निसी पृष्ठ पर त्रुटि नहीं है	(1/4) 10
नेवल एक पृष्ठ पर चुटि है	$\binom{40}{1}\binom{3}{4}\binom{3}{4}^{39}\binom{1}{4}$
नेवल दो पृथ्ठो पर त्रुटि है	$\binom{40}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{36}\left(\frac{1}{4}\right)^2$
कैवल तीम पृष्ठा पर तृदि है	$\binom{40}{3}(\frac{2}{4})^{17}(\frac{1}{4})^{3}$
मैबल चार पृष्ठा पर त्रुटि है	$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$
केबल पाच पृथ्ठो पर तुटि है	$\binom{40}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{35} \left(\frac{1}{4}\right)^{5}$
केंबल छ पृथ्ठो पर तृदि है	$\binom{6}{4}\binom{3}{4}\binom{3}{3}\binom{1}{4}\binom{1}{4}$
नेवल सात पृष्ठो पर त्रुटि है	$\binom{40}{7} \left(\frac{3}{4}\right)^{33} \left(\frac{1}{4}\right)^{7}$
केवल आठ पृथ्ठो पर त्रुटि है	$\binom{40}{9} \binom{9}{4}^{32} \binom{1}{4}^{8}$
केवल नौ पृथ्ठो पर त्रुटि है	$\binom{40}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^{31} \left(\frac{1}{4}\right)^{9}$
केवल वस गृथ्डों पर त्रुटि है	$\binom{40}{10} (\frac{3}{4})^{30} (\frac{1}{4})^{10}$
केवल ग्यारह पृग्ठो पर बुटि है	$\left[\binom{1}{4}\binom{2}{6}\binom{2}{3}\binom{2}{6}\binom{2}{1}\right]_{11}$
केवल बारह पृथ्ठा पर त्रुटि है	$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right)^{\frac{1}{4}}\right)$

क्य विकय करते हैं। लेकिन यह बहुत कुछ अनुमान पर आधारित होता है। एक वडा व्यापारी जो नारखानो से बढे पैमान पर माल सरीदता है इस अनुमान को बैज्ञा निकरीति से लगाना चाहेगा कि जिससे लसे अधिक से अधिक लग्न हो। एक बार में जैसे जो माल मिल्ता है उसे ढेरी (lot) वहते हैं। यदापि नारसावा में से वस्तुर्रे मधीमों से बननी है, सथापि एक ही ढेरी की मित-निम्न वस्तुओं में भी अंतर पाया जाता है। कारखानें की भिन्न-भिन्न मधीनों में अंतर, मधीनों के समजन (adjustment) से पडने वाला अंतर, कच्चे माल में अंतर, अधित कुछ ऐसे कारण है जिनसे अंत में कारखाने से निकली बस्तुओं में अन्तर पड़ जाता है। क्लों के उपयोग करनेवाले मजदूरों की संतुरता पर भी यह बहुत कुछ निमेर करता है।

सदि यह अंतर सावारणन्सा हो तो व्यापारी हसको ज्येक्षा कर देगा क्योंकि ग्राहक या तो इस अन्तर को पहचान ही नहीं पार्येषे या उसको कोई विशेष महत्त्व नहीं वेंगे। परन्तु मह समय है कि यह अन्तर रहाना रण्य्य हो उठ कि प्राहक सहतु करीवना अक्ष्मीकार कर दे। ऐसी वस्तुओं को दोषपूर्ण मानना होगा। कारखाने के लिए दो रासे हूं प्रमुख्य मानना होगा। कारखाने के लिए दो रासे हूं प्रमुख्य निक्का कर दे। ऐसी वस्तुओं को लिकाल दे। इस प्रकार वे माल के रात प्रसिद्धत अच्छे होने की प्रतिव्युति (guarantee) वे सकते हैं। लेकिन इस तरीके में दो कठिनाइयों हैं। पहली तो यह कि हर एक वस्तु के निरोखण की विल्वाल की स्वय्य प्रकार ही। परली तो यह कि हर एक वस्तु के निरोखण की विल्वाल की आपको आवच्ये होगा। परन्तु निरोखन तो मनुष्य हारा हो होता है और मनुष्य से पत्री होना स्वामानिक ही है। यदि एक मनुष्य सैकडा वस्तुओं का निरोक्षण कर चुका है और वह सब दोपरिहत हैं दो यह स्वामानिक है कि चोप वस्तुओं का निरोक्षण कर चुका है और वह सब दोपरिहत हैं दो यह स्वामानिक है कि चोप वस्तुओं का निरोक्षण कर वत्ती वारीकी से नहीं होगा। इसी सभय है कि कह के बस्तुओं का निरोक्षण कर वत्ती वारीकी से नहीं होगा। इसी सभय है कि कह के बस्तुओं को निरोक्षण वह वता है। इसीकार कर लें। इसी कि कि तरिक्षण कर वृत्य है हि हम ति हम कि सार्य व्यव वह वाता है। इसीकार कर लें।

मान लीजिए कि एक ढेरी में दस हुनार वस्तुएँ है जिनकी कुल कीमत एक लाल रनपा है और इनमें से एक मितात दोपपुनत है। इसका यह अर्थ हुना कि म्यापारी एक हुनार स्पर्म की वस्तुएँ नहीं बेच पोपपा। और मित सत्ते में के भी थी तो सम्बत्त करी उन्हें अने कि स्पर्म की सम्बत्त की स्पर्म की स्पर्म की स्पर्म की स्पर्म की स्पर्म की स्पर्म के लिए कारजाना या व्यापारी पूर्ण निरोधण का प्रयोग करे जिसमें उसनी एक हजार स्पर्म से अधिक मा कर्म पड जाये तो इस निरोधण का कोई विशेष लाभ नहीं है। कुल ज्यान का हिसान कलाकर लाभारी ढेरी में कुछ मितात दोपपुनत सन्तुओं को सहन करना होनार कर लेगा।

दूसरा रास्ता उसके लिए प्रतिदर्श पर निर्भर करता है। प्रतिदर्श कितना बड़ा होना चाहिए, यह इस पर निर्भर करता है कि व्यापारी को कितनी प्रतिशत दोपयुक्त करन्तुएँ स्वीकार करना सहन है। यदि हम शृदि की इस चरम प्रतिशतता को P से

सुजित करें तो हमारी सास्थियोय ममस्या। केवल इस परिकल्यना की जाँच करना है कि हो में P प्रतिशत बरहुएँ या P प्रतिशत के कम बरुएँ लोपपुनत है। मिद प्रतिशत में देपयुनत तरतुओं का अनुपात P से अधिक P हो और उपर्युक्त परिकल्पना के आधार पर परिकल्पित है से स्टान की प्राप्तिक है कि प्रतिवर्ध में P प्रतिशत अपया उत्तमें अधिक बरुएँ दोपपुनत है तो हम यह समझेंगे कि उम परिकल्पना की इस प्रमान के आधार पर अस्वीकृत कर देना चाहिए और यह मानना चाहिए कि बास्तव में हैंगे से देपयुनत बरुतुओं का अनुपात P से अधिक है। इस दया में डेरी की अस्वीक्ता करा हो पुनितसगत है। बयोकि P प्रतिशत ही वह पराकारा है जहाँ तक वह है ती हम हम स्पाप्त है। कहाँ तक वह है ती हम हम स्पाप्त हम हम हम तथा है। हम हम स्वाप्त हम स्व

राण्टतया इस उबाहरण में तथा पिछले उबाहरण में, जिसमे प्राधियों के चुनाव की समस्या थी, बहुत अधिक समानता है। बास्तव में बैज्ञानिक अनुसमानो और प्रति-दिन में जीवन में, क्य-क्षिक्य में, योग्य व्यक्तियों के निर्वाचन में, तथा मये-नमें सामना की कार्य-चाक्कता की परीक्षा में सेकडा ऐसे उबाहरण हमारे सामने आंते हैं जिनमें हम यह जाना महाते हैं कि कोई विशेष प्रयोगण्डय अनुपात किसी दी हुई सक्या से बडा है अथवा नहीं। इस मब स्थितियों में प्राधिकताआ की गणना दिपद बटन की महायता से की आंती है।

६ ६·३ द्विपद घटन के कुछ गुण

पाठको की इस महत्त्वपूर्ण बटन के बारे में अधिक जानकारी करने की उत्सुकता अवस्य होगी । इसके कुछ गुणी का वर्णन नीचे दिया गया है —

- (१) यह वटन असतत है। यदि प्रतिदर्श-सरया N है तो द्विपद चर केवल (N+1) भिन्न भिन्न मान धारण कर सकता है जो 0, 1, 2, 3, 4 , 10, N है।
- (२) इस चर का सात n होने की प्राप्तिकता $\binom{N}{n}$ p^n (1-p) N-n है। p मून्य थ एक के बीच की कोई मस्या है। इस प्रकार N और p दो ऐसे मान है जिनसे पिशेष द्विपद टटन निर्दिट्ट हो जाता है।
- (३) इसका बटन-फल्ल (distribution function) याने n अथवा n से कम मान धारण करने की प्रायिकता $F(n) = \sum\limits_{N=0}^{n} {N \choose N} p^{n} (1-P)^{N-2}$ है ।
 - (४) परिभाषा के अनुसार इस बटन का साध्य अथवा प्रत्याशित मान

$$\mu (n) = E(n) = \sum_{n=0}^{N} n_n \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} n_n \frac{N!}{(!(N-n)!)!} p^n q^{N-n}$$

$$= N \frac{N!}{p_{n-1}} \sum_{o(n-1)!} (N-1)!} p^{n-1} q^{N-n}$$

$$= N \frac{N!}{p_{n-1}} \sum_{o(n-1)!} (N-1)!} p^{n-1} q^{N-n}$$

$$= N p (p+q) N^{-1}$$

$$= N p q (p+q) N^{-1}$$

$$= E[n-E(n)]^2$$

$$= E[n-E(n)]^2$$

$$= E[n^2-2n E(n) + E^2(n)]$$

$$= E(n^2) = \sum_{n=0}^{N} n^2 (n^2)$$

$$= N(n^2-1) + n \frac{N!}{n!} (N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$= N(N-1) p^2 \sum_{n=0}^{N} \binom{n}{n!} p^{n-2} q^{N-n}$$

$$+ N p \sum_{n=0}^{N} \binom{n}{n} p^{n-1} q^{N-n}$$

$$+ N p \sum_{n=0}^{N} \binom{n}{n} p^{n-1} q^{N-n}$$

$$= N(N-1) p (p+q)^{N-2} + N p (p+q)^{N-1}$$

$$= N(N-1) p (p+q)^{N-2} + N p (p+q)^{N-1}$$

$$= (n) = N p^{2}$$

$$= (n) = N p^{2}$$

$$= N p - N p$$

$$= N p - N p$$

$$= N p (1-p)$$

$$= N p q$$

$$= (6 2)$$

हम इस बटन के सभी घूषों का उपर्युक्त रीति से परिकलन कर सकते हैं । यह रीति अब तक पाठको को स्पट्ट हो गयी होगी। इसिलए और अधिक घूषों नी गणना करना यहाँ जावस्यक नहीं है । असम से पूर्ण माध्य न निसरण निकान परिकल्प करन किया गया है अधिक महरून रखते हैं, जैसा कि आमें हमें यिदित होगा। इसके अतिपिरत इस बटन के अन्य पूर्ण जैसे माध्यिका (median), स्तुर्वेक (quartiles) बसमक (deciles) या यततामक (percentiles) भी बटन की सभी घटनाओं के ज्ञात होने के कारण परिकलित किये जा सकते हैं, किन्तु क्योंकि यह एक असतत बटन है इसिलए परिमापा के अनुसार यह बहुत समब है कि कई गुण यटन में विद्यमान न हो। मान जीजिए N=2 और $p=\frac{1}{2}$ । इस स्थित में अने कल तीन मान घारण करता है 0, 1 और 2 । इनकी घारण करने की प्रायिकताएँ कमस $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{9}$ और $\frac{1}{9}$ है । इस बटन में कोई भी ऐसी सक्या नहीं है जिसके बरायर या उन्नते कम मान घारण करने की प्रायिकता $\frac{1}{9}$ है। इस महिनो इसको 0 और $\frac{1}{9}$ से सकता की सकता के कहना है सकता करने की प्रायिकता करने की का प्राया करने की प्रायिकता $\frac{4}{9}$, और $\frac{1}{9}$ स्थारिक 0 मान घारण करने की प्रायिकता $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{9}$ और $\frac{1}{9}$ है । इस वहने का कोई सकता प्राया करने की प्रायिकता $\frac{4}{9}$, और $\frac{1}{9}$ है । प्राया करने की प्रायिकता $\frac{4}{9}$, और $\frac{1}{9}$ से प्राया करने की प्रायिकता $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{9}$ है । प्राया करने की प्रायिकता $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{9}$ है । प्राया कि प्राया करने की प्रायिकता $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{9}$ है । प्राया जिस्ती की प्रायिकता $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{9}$ है ।

परन्तु इसी तर्ज से यह माध्यिका 1 और 2 के बीच की कोई सख्या भी हो सकती है । इस प्रकार किती यवेच्छ नियम द्वारा मधिष माध्यिका की परिभाषा थी या सकती है, परन्तु उत्तवना कोई पियोग कहरून नहीं होगा । जिल प्रकार इस द्विपद कहन में माध्यिका का अस्तित्व नहीं है उसी प्रकार इसमें और अन्य करें द्विपद बढ़नों में बदानक, सत्तनमक ख़ादि का अस्तित्व नहीं होता । इसी कारण ये गुण इतने अधिक महत्वपूर्ण नहीं समझे गये हैं तथा इनके परिकलन के लिए व्यर्थ चेटा यहां नहीं की गयी है ।

९६४ द्विपद-वटन के लिए सारणी

इस बदन का बहुत ही ब्यापक प्रयोग होने के कारण सभव है कि एक ही N और p के मानवाल बदनों का अनेक नैज्ञानिक भिन्न-भिन्न स्थितियों में सभा भिन्न-भिन्न देशों में उपयोग करते होंगे। इन सबको बार-बार एक ही प्रकार का परिकल्प यदि केन्नम ग्रूड जानने के लिए करना पट कि प्रयोग के एक को होको हुए एक्टिन्यना की स्वीनार करना चाहिए अधवा नेही, जब यह मानियक कितवासे का अप्ययद होंगा। वास पत्र कहा हो हो सकता कि जिय कितीने एक बार एक बिसेप बटन के लिए परिकल्प किया हो सकता कि जिय कितीने एक बार एक बिसेप बटन के लिए परिकल्प किया हो सह उसको जानी और प्रसरों की बूध मेहनत बचाने के लिए प्रिकल्प किया हो सह उसको जानी और प्रसरों की बूध मेहनत बचाने के लिए प्रिकल्प कर

क्पर ले और प्रकाधित करा दे ? इसी विचार से सास्यिका ने इस वटन की सारणी सैयार की है जिसमें

$$F(n) = \sum_{x=0}^{n} {N \choose x} p^x q^{n-x} \qquad (63)$$

के मान N के एक से लेकर पचास तक के, n के शुम्स से लेकर N तक के और P के 00, 00201, 003, .,098, 099,100 मानी के लिए दे रखे हैं। दी खबाइरण नीचे विसे हुए हैं।

सारणी सख्या 62

दो द्विपद-यटनो के सचित प्रायिकता फलन
N=25 p=0 50

r	F(r)
(1)	(2)
I	0 0000008
2	0 0000007
3	0 0000783
4	0 0004553
_5	0 0020387
6	0 0073166
7	0 0216426
8	0 0538761
7	0 1147615
10	0 2121781
11	0 3450190
12	0 5000000

7	F(r)	
(I)	(2)	
13	0 6549810	
14	0 7878219	
15	0 8852385	
16	0 9461239	
17	0 9783574	
18	0 9926834	
19	o 9979613	
20	0 9995447	
21	0 9999217	
22	0 9999903	
23	0 9999992	
24	1 0000000	

N==40

r	F(r)	
(1)	(2)	
14	D 000000I	
15	0 0000006	١
16	D DDDDD28	
17	0 0000123	۱
18	0 0000486	١
19	0 0001749	
20	0 0005724	
21	0 0017084	I
2.2	m 0046515	
23	0 0115614	
24	₩ 0262449	
25	0 0544372	
<u></u>		J

r	F(r)	
(I)	(2)	
26	0 1032317	
27	0 1791342	
28	0 2848556	
29	0 4160959	
30	0 5604603	
31	0 7001677	
32	0 8180458	
33	0 9037754	
34	0 9567260	
35	m 9839578	
36	■ 9953043	
37	0 9989843	
1	1	

विस्तृत मारणी के लिए देखिए—"Tables of the Incomplete Beta-Function" by Karl Pearson ६ ६ ५ एक मनोवैज्ञानिक सिद्धान्त की जाँच में द्विपद बटन का उपयोग

हम इस अध्याय की एक मनीवैज्ञानिक प्रयोग के विवरण ने समाप्त करेंगे जिसमें इस बटन का प्रयोग होता है ।

एक ही नाम करने के नई दग हो सबते हैं। जमय है जि एक ही मनुष्प को मह सब दग नात हों। यदि उसके पास नोगने ना नाकी समय है और मस्तिष्ण-भी-स्वास्य है तो वह अवस्य ही इनमें से सबसे साम्य पढिता को अपनायेगा। यह एक मनोवंडामिन सिद्धान्त है नि पदि मनुष्य थना हुआ हो अपनायेगा जिसको उसने सबने प्रथम अवना न हो तो वह नायें न रने की उस पद्धित को अपनायेगा जिसको उसने सबने प्रथम सीपा या। यह नेवळ एक सास्थितीय नयन है। इसना यह दावा नहीं है कि प्रयोग प्रयोग प्रयोग बार जब ऐसी स्थित होनो तो इस ही प्रकार आवरण नरेगा। यह नेवळ यह मतादा है कि अधिवत्तम मनुष्य उसी तरीवें को अपनायेंगे जिसे उन्होंने पहिंचे सीखा हो।

समस्या है इस प्रयोग द्वारा सिद्धान्त की परीक्षा करने की। कालेज के अठारह विद्यादियों को गुणा करने के दो तरीके सिखाय गये। इनमें से ती को पहला तरीका प्रयम और रोग नी को दूसरा तरीका प्रयम सिखाया गया। एक दिन छ घटे के किल मानसिक परिश्रम के पर्कान् उनको गुणा करने के लिए कुछ प्रश्न दिसे गये। सिद्धात के अनुसार यह आंशा को जाती थी कि यकान के कारण ये विद्यार्थी एक तरीके का उपमोग करेंगे जिमको उन्होंने पहले सीखा था। प्रश्येक विद्यार्थी की दी श्रीपयों में से एक में एक दिया गया। एक श्रीणी तो उन विद्यार्थियों की थी जि हाने प्रयम सीखे हुए तरीके का उपयोग किया, प्रवर्श वे बिलहोने वाद में सीखे हुए तरीके का उपयोग विद्या।

यह परिकल्पना जिमकी हम परीक्षा करेंगे यह है कि पहले और बाद में सीजे हुए तरीका की इस स्थित में अधनाने की शामियनाएँ बराबर है अपीत् शेनो मामियनाएँ में है । यदि प्रतिवर्ध में इन दो श्रेणियों के अनुपात की सल्या बराबर न भी हो तो जनमें अत्तर इतना ही होना चाहिए कि यह केवल मयोग का फल है । प्रीरात जतर बयबा उससे भी अधिक अतर की प्राधिकता इतनों कम गही होनी चाहिए कि हमें अपनी परिकरणना से सहे होने क्यों। यदि यह जतर अधिक होने के अधिक हमें अपनी परिकरणना के केवल मयोग की अधिक अतर की प्राधिकता है कि इस सिंदा के तो हम यह भी वह तकते हैं कि इस सिंदा की प्राधिकता है ।

प्रयोग में देखा गया कि केवल दो विद्यार्थियों को छोडकर बाकी मवने पहले सीखें हुए तरीके का उपयोग किया । ये ऑकडे नीचे सारणी में दिये हुए हैं।

सारणी संख्या 63

	पद्धति जो अपनायी गयी		-	
1	पहिले सीखी हुई	बाद में सीखी हुई	बुल	
(1)	(2)	(3)	(4)	
वारबारता	16	2	18	

इस प्रेक्षित जतर और इससे अधिक अन्तर की प्रायिकता के कल्म नीचे दिये हुए हैं।

सारणी संख्या 64

घटना	प्राधिकता
(1)	(2)
16 पहली थेणी और 2 दूसरी श्रेणी में	$\binom{18}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{18}$
17 पहली श्रेणी और 1 दूसरी श्रेणी में	$\left(\begin{array}{c} 18\\ 1\end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1\\ 2\end{array}\right)^{18}$
18 पहली श्रेणी और दूसरी श्रेणी में कोई नही	$\left(\frac{1}{2}\right)^{18}$

इसलिए 16 या उससे अधिक विद्यार्थिया के प्रथम श्रेणी में होने की प्राधिकता

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^{18} \left\{ \begin{array}{l} 18 \times 17 \\ 1 \times 2 \end{array} + 18 + 1 \right\}$$

$$= \frac{182}{2^{18}}$$

$$= \frac{91}{131072}$$
< 0.001

समेक्ति मह प्राधिकता एक हजार में से एक से भी कम है, हमें उस आधार पर संदेह होना स्वामायिक ही है जिससे इस प्राधिकता का कठन किया गया है और इस कारण हम परिकल्पना को अस्वीकार करते हैं। इसका विकल्प यह है कि प्रमोग से सिद्धान्त की पृष्टि होती है।

इस अच्याय में हमने केवल द्विषद बटन के उपयोग पर विचार किया है जिससे मुख पटनाओं की प्रायिकताओं का परिकलन किया जा सकता है। इसमें परिकल्पना की जाँच केवल प्रासांगक थी। अगले दो अच्यायों में हम कुछ अय बटनो का अध्यतन करेंगे और उदाहरणों द्वारा उनके उपयोग को समझगें। इसके परचात् ही हम परिकल्पना की जाँच के सिद्धान्त (theory of testing of hypothesis), प्रतिदर्शनस्या का निश्चित करना इत्यादि अन्य सर्वाधन समस्याओं पर विस्तारपुषक विचार करेंगे।

अघ्याय ७

प्वासों-बंदन (Poisson's distribution)

९ ७:१ कुछ परिस्थितियाँ, जिनमें प्वासी-वंटन का उपयोग होता है

पिछले अध्याय में जब हम डिपद बटन के उपयोग पर विचार कर रहे थे, सब हमने एक निर्दिट प्रतिदर्श मक्या की थी और हमें जात था कि उससे एक विशेष घटना कितनी बार होती है, जीर यह भी जात था कि वह घटना विकतनी बार नहीं होती। उदाहरूल के लिए टाइपिस्ट की परीक्षा के लिए हमने देला था कि चालौत पुटों में से विरह्म पूटों पर मुटियाँ थी। व सत्ताईम पुटों पर कोई गलती न थी। किसी औपम के लामदायक गूण की परीक्षा के लिए हमने यह गणना की थी कि कितने रोगी आरोग्य लाम कर लेते हैं और विरावे ठीग्य नहीं होते।

परन्तु ऐसे भी कई प्रयोग हैं जहाँ यद्यपि हम यह तो गिन सकते हैं कि घटना कितमी बार होती है, परन्तु उसके न होने की सहया इतनी अधिक होती है कि उसके गिनने की परेसानी से हम बचना चाहेंगें। टाइपिटट की परीक्षा को ही एक दूकरे वृष्टिकोण से देवा जा सकता है। कल्पना कीजिए कि टक्कित पुट्ट पर कमभग साडे-चार सी नध्य है, जिनमें कणभग अवार हो अधिक है और औसत से एक पुट्ट पर केन 1.5 बृद्धि से सनते हैं। इसका यह अर्थ है कि एक अक्षर के गलत टकित होने की प्रामिकता है।

प्राय $\frac{1.5}{1600}$ है। इस बसा में गळतियो की भिन्न-भिन्न सस्याओं की प्रायिकता के परिकलन में दिवद बटन के उपयोग में दी किठताइयां है। एक तो यह कि इतनी कम प्रायिकता और इतनी अधिक प्रतिदर्श सस्या के लिए पहुछे से परिकलित दिवद बटन की सारपी प्रस्तुत नहीं है। इस कारण इस प्रकार के हर प्रणोग में क्ये प्रिप्ते से परिकलन जावरण होगा। इसने कठिनाई, जो मेद्रानितक रूप से अधिक महत्त्वपूर्ण है, यह है के प्रयोक पूर्व पर करातों की सस्या ठीक अठारह मी तो नहीं है। किसी पूर्व पर वहां प्रति है, जब कि कठारह मी तो नहीं है। किसी पूर्व पर वहां प्रति है, जब कि कटा दिसी पृष्ठ पर 1840 तक पहुंच सकती

है। हमारा प्रतिदर्श एक पृष्ठ है, न कि अठारह मौ अक्षरो का एक समूह। डिपद वटन इस बात पर आधारित है कि प्रतिदर्श-मध्या निश्चित हो।

इसी प्रकार एक व्यापारी दिन में 25 बार अपने टेकीफोन का प्रयोग करता है। इन प्रयोगा में, जो सक्षिप्त समाचार भैजने के किए किये जाते हैं, समय बहुत कम गा क्लाभंग नहीं के बराबर रुपता है। इस घटना की प्रायिवना कि क्लिसी एक क्सिंप सम पर ब्यापारी अपने फोन का प्रयोग कर रहा होगा, क्लाभग झून्य है। किर भी दिन भर में इतने अधिक क्षण होते हैं कि पूरे दिन में हम सौसतन 25 समाचार मैंने जाने भी ही आजा करते हैं।

जब एक जबटर कोटाणुआ या बैक्टीरिया की औजूरपी का पता लगाने के लिए किसी रोगो के रस्त की परीक्षा करता है, तो उसकी विधि सदीप में निम्निलिखित है। रहक की वर्ष को एक पत्नी कोच की पट्टी पर फंला लिया जाता है। यह पट्टी अनेक छोट बरों में विभाजित होती है। व्याधिवाज इनमें में कुछ बरों में कीटाणुओ की गणना करता है। कुछ थोडे से बगों में कीटाणुओ को पत्ना का ला सकती है, पर्यं व्याधित कुल बरों के जीटाणुओ को गणना की जा सकती है, पर्यं व्याधित कुल बरों के जीटाणुओ को गिनना कठित है। इसी प्रवार कारणाने की सीयार बस्तुओ में नृटियों की गणना की जा सकती है एर अन्तृटियों की नहीं।

इन सभी जनस्थाओं में, याद्विक्षक प्रयोग की प्रतिदर्श सक्या या तो बहुत बडी और तात होनी है जयबा इतनी बडी होनी है कि उसका जानना ही कठिन है। साथ ही साथ प्रायमिक घटनाशा की प्रायिकता बहुत ही छोटी, गुन्वप्राय ही होती है, लेकिन प्रतिदर्श-सच्चा के बडे होने के कारण प्रतिदर्श में उस घटना के होने की प्रायक्त दर्शन छोटी और पूर्यप्राय नहीं होनी। अत हम द्विष्ट बटन का प्रयोग छोडकर एक दूसरे प्रकार का बटन अपनाते हैं। यह बटन भी द्विष्ट बटन से ही ब्युत्तन हैं

§ ७२ द्विपदवटन का सीमान्त रूप

हम इस प्रकार के N और p के अनेका माना की करमना कर सकते हैं, जिनका गृणनफल 15 हा। जैसे N=3, $p=\frac{1}{2}$, N=6, $p=\frac{1}{2}$; N=9, $p=\frac{1}{6}$, N=1500, $p=\frac{1}{1000}$ तेका आदि।

भी भी भी N ना मान बडता जाता है, p का मान पूर्य की और अपसर होता आता है। में सभी मान-पूर्य एक एक डियन की परिभागा करते हैं, जिनमें सबके प्रापलों का गुणनफळ 15 है। डियद घर केवळ पूर्णस्थ्यक मान ही घारण कर सबते हैं। किसी पूर्ण सस्या को लीजिए तो इनमें से हर एक सटन के लिए हम इस पर के इस पूर्ण गस्या से कम अथवा बरावर मान घारण करने की प्राधिकता का कलन कर सकते हैं। जैसे-जैसे N का मान बढता जाता है, यह प्रायिकता एक निश्चित सीमान्त सस्या की ओर अग्रसर होती जाती है। हम एक ऐसे बटन की कल्पना कर सकते हैं, जिसके लिए चर के उस दिशेष पूर्ण-संस्था से कम या बराबर मान धारण करने की प्राधिकता यही सीमान्त सरमा है। यह बात बेवल एक विशेष पूर्ण-संख्या के लिए ही नहीं बल्कि प्रत्येक पूर्णराख्या के लिए सत्य है। आइए, हम देखें कि इस सीमान्त वटन की परिभाषा क्या है। अर्थातु इस बटन में चर के लिए किसी विशेष मान r को प्राप्त करने की प्राधिकता क्या है। हम इस बटन के साधारण रूप का परिचय प्राप्त करना चाहेंगे, न कि केवल ऐसे द्विपद बटनों ने सीमान्त राप का. जिनके प्राचल IV और p का गणनफल I < हो ।

यदि हम इन द्विपद वटन के माध्य को λ से मुचित करे तो प्राथमिक घटना की प्राधिकता p को $\frac{\lambda}{2}$ के बराबर रक सकते हैं। यह इसलिए कि दिपद वटन में माध्य

का मान Np होता है जैसा हम पिछले अध्याय में सिद्ध कर चके है ।

क्रत $N_{p=-\lambda}$

इस प्रकार A तो अचर है और सीमान्त विधि में केवल N का मान उत्तरोत्तर वढता जाता है। आइये हम देखें कि उपर्यन्त बटन में चर का मान होने की प्रापि-कता क्या है।

$$\begin{split} P(r) &= \binom{N}{r} p^r (1p)^{N-r} \\ &= \frac{N(N-1)(N-2)}{r!} \frac{(N-r+1)}{(N-r+1)} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^r \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-r} \\ &= \frac{\lambda^r}{r!} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \times \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^r} \frac{\left(1 - \frac{r-1}{N}\right)^{N-r}}{\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^r} \end{split}$$

अब मदि । के किसी निहित्त मान के लिए N का मान बढता जाता है तो

$$\left(\frac{1}{N}\right), \left(1-\frac{2}{N}\right), \left(1-\frac{r-1}{N}\right)$$
 where $\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^r$

ये सभी सध्याएँ \mathbf{I} के अधिकाधिक निकट आती जाती हैं \mathbf{I} और $\left(\mathbf{I} - \frac{\lambda}{N}\right)^N$

अग्रसर होता है [—]भे की ओर जहाँ

$$e = I + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$$= I + \sum_{j=1}^{n} I_{j}$$

भौर । का एक विशेष गुण यह होता है कि किसी भी सहया के लिए

$$Z = 1 + \frac{Z}{1!} + \frac{Z^{2}}{2!} + \frac{Z^{3}}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Zr}{r!}$$

इस प्रकार प्राधिकता $P(r) = \frac{\lambda r}{r!} e^{-\lambda}$ । बहुवटन जियमें चर केवल पूर्ण सत्याओं के ही बरावर हो सकता हो और प्रत्येक पूर्ण सत्या के बरावर हो सकता हो और जिसमें चर का मान किसी पूर्ण सत्या r के बरावर होने की प्राधिकता

$$P(r) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \qquad (71)$$

हों वह प्यामा बटन के नाम से विक्यात है। पाठकों को शायर यह श्रम हो कि इस प्रकार का बटन हों भी सरता है अथवा नहीं, इसकी परोक्षा हर एक पूर्ण नक्या से सपत प्रापिकताओं का शोग करके हो नकती है। यदि यह योग 1 हो तो हम वह सकते हैं कि इस प्रकार का बटन समय है।

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \left[1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots + \frac{\lambda^r}{r!} + \cdots \right]$$

$$= e^{-\lambda}, e^{\lambda}$$

$$= 1$$

यह स्पष्ट है कि किसी भी द्विपद चटन का पूर्ण ज्ञान हमें N और p के मानों के ज्ञान से ही जाता है नयोंकि सभी प्राधिकताएँ इन्ही दो संख्याओं से ब्युत्पन्न हैं। निस्ती भी पंटन में ऐसे मानों को जिनने उसकी परिभाग होती है उन बटन के प्राचल (parameters) कहते हैं। प्वासी-चटन के लिए केवल एक A का ही मान जानना यावस्पक है। यही इस बटन का अकेला प्राचल है।

७ ३ बास्तविक वंटन का व्वासों-वंटन द्वारा सक्षिकटन

अब यह देखा जा सकता है कि ऊपर जो उदाहरण दिये गये थे और जिनमें द्विपद बटन के प्रमोग में हमें हिचकिचाहट थी उनके लिए प्यासी-बटन द्वारा बास्तिक प्रापिकताओं के काफी अच्छे सीप्रकट (approximate) मानों के परिकलन किये जा सकते हैं। इसका कारण यह है कि सीमान मान की परिभाषा के अनुसार यदि N के किसी फलन $\int (N)$ का सीमान्त मान दुहों तो यथेट रूप से बड़े N के लिए g और f(N) में ज़तर शग्य की और अग्रसर होता जाता है

इस बटन का सबसे प्रसिद्ध उदाहरण है बोर्ट-केविच (Bortkewitch) द्वारा सकलित आधार-सामग्री जिसको प्रोफेसर रोनास्त्र ए फिश्वर (R.A. Fisher) ने अपनी पुरस्तक में जी उदायृत किया है। दस फौजी ट्रकडियों में शीस वर्षों में को मृत्युर्पे पोडे की दुल्ली के आधात से हुई वी यह उनने मवधित आंकड़ो पर आधारित है। इनकी नीचे सारणी में दिया हुआ है।

सारणी संख्या 7.1

मृत्यु सस्या	वर्षों की वारवारता जिनमें यह मृत्यु स∉या थी
0	109
I	65
2	22
3	3
4	ı
5	0
6	0

हम देखते हैं कि कुल मृत्यु-गस्था (0×109)+(1×65)+(2×22)+(3×3)+(4×1) अर्थात् प्रति दुक्को प्रतिक्षं मृत्यु सस्या ० ६१ हुई । इसलिए हम λ का भान ० ६१ ले सक्ने हैं और तब $e^{-\lambda}=0.543$ (तीन दशमल्य अक्त तक सही) । अल्य अल्य पटनाआ की प्राधिकता को परिकल्प तक खाना-बटन के आधार पर निसमें प्राध्य $\lambda=0.61$ हो कीचे दे पक्षा है ।

सारणी सरया 72

प्रति दुकडी प्रति वय मृत्यु सस्या	प्राधिकता	दो सौ घटनाओं में अपेक्षित बारबारता	बास्तविक बारवारता
(1)	(2)	(3)	(4)
0	e `	108 6	109
ı	λe ^{-λ} =0 331	66 2	65
2	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = 0 \text{ 101}$	20 2	22
3	$\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = 0.021$	42	3
4	$\frac{\lambda^8}{4^7}e^{-\lambda} = 0.003$	06	τ

अपेक्षित और वास्त्विक बारबारताजा की लुखना करते से पाठको को यह विस्वास हो आयेगा कि इस प्यासा बटन के आधार पर परिकलन करके हम बास्त्विक मृत्यु सक्या का एक उच्छा सौन्य का नाम अपन हो सकता है। विजेष रूप से जब हम जानते ही कि बाद्विक प्रयोग के फल्स्वरूप बारबारता अवर नहीं होने मेरि कि मिन प्रतिदर्शों में बह क्रिय-निश्च हो सर्वी है। यत यह शान केना अस्त्रत नहीं सम्या जा सकता कि मृत्यु सस्या एक प्यामा चर है जिसमे प्राचल रूप सान 0 61 है। बद्याप प्रकृति में याद्विक्छक चर किन प्रवास करता है श्रीर

न लग सकता है तयािप प्यासो-वर एक ऐसा सरल और सतीपजनक निरूपण है जिसकें आघार पर हम घटनाओं की प्राियतवाज का अनुमान लगा सेवरी है तथा उनके बारे में विसी हद तक भविष्यवाणी भी कर सकते हैं। यह देखा गया है कि हर एक प्रकार को आकारिसक घटनाओं के न्यार यह बटन एक अवारे प्रविद्या गया है कि हर एक प्रकार की आकारिसक घटनाओं के न्यार यह बटन एक अवारे प्रविद्या के काम देता है। यह वैसे भी स्पष्ट है क्यांकि यह दियद-बटन वा सीमाना रूप है वस प्राथमिक घटना की प्राियकता p श्रूपप्राय होना अववा घटना की प्राियकता p श्रूपप्राय हो जाती हैं। प्राियकता वा ग्रूप्यप्राय होना अववा घटना का आकारिसक होना एक ही बात के वो रूप है। घटना को आकरिमक उत्त समय कहते हैं जब इसकी आशा नहीं की जाती। आबान करने वा बारण यह होता है कि उत्त घटना की प्राियकता बहुन कम होती है और हमारे अनुभव में ऐसी घटना के बार-बार होने भी क्षान्या भी बहुत वम रहनी है।

§ ७४ प्वासो-वटन के कुछ गण

आद्दमें, अब हम प्यामा-बटन के बारे में बुछ और जानकारी प्राप्त करें। (१) यह बटन भी असनत है और जामो-बर मभी पूर्ण-मस्पाभों के बराबर मान धारण कर सकता है तथा अन्य कोई मान नहीं धारण करता।

(२) परिभाषा के अनुसार इस बटन का माध्य

$$\mu(n) = E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \lambda \sum_{n \geq \infty}^{\infty} e^{\lambda} \frac{\lambda^{n} 1}{(n!)!}$$

यदि हम (n-1) को n से मूचित कर तो

$$\mu (n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda \frac{\lambda^n}{n!}}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda} A$$

$$= \lambda e^{-\alpha} e^{-\alpha}$$

$$= \lambda \qquad (7.2)$$

इस प्रकार इस बटन का माध्य इसके प्राचल प्र के बराबर होता है।

$$\sigma^{2}(n) = E(n^{2}) - E^{2}(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n}}{n^{1}} - \lambda^{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \{n(n-1) + n\} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n}}{n^{1}} - \lambda^{2}$$

$$= \lambda^{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n}}{(n-2)^{1}} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n}}{(n-1)^{1}} - \lambda^{2}$$

लेकिन $\sum_{n=2=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)^{\dagger}} = \epsilon^{\lambda}$ और $\sum_{n=1=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)^{\dagger}} = \epsilon^{\lambda}$

$$\begin{array}{ll} \therefore & \sigma^2(n) &= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} - \lambda^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \end{array}$$

इस प्रकार यह एक घ्यान देने योग्य गृथ है कि इस बटन का माध्य और प्रसरण दोनों है। इसने प्राचक À के बराबर होते हैं। इस माध्य और प्रसरण का करन हम इंपरें कर से भी कर सबते हैं। हमें यह तो याद ही है कि यह उस प्रकार के डिपर-बटनों को सीमार्गठ रूप हैं जिनमें N'और p का गुणकरूठ À के बराव है। इस बटन में माध्य का मान Np और प्रसरण का मान Np होता है। इसस्टिए हम आशा करते हैं कि पहास्त हमें कि प्रसर्भ का मान Np बौर प्रसरण का मान Np बौर प्रसरण कमा Np बौर Npq के सीमान्त मान होंगे।

लेकिन
$$Np=\lambda$$

बीर $q=1-p=1-\frac{\lambda}{N}$

 λ एक अचर है, इस्रलिए जैसे-जैसे N का मान बढता जाता है $\frac{\lambda}{N}$ का मान $\frac{\lambda}{N}$ का सीम क्षेत्र अध्यसर होता जाता है। इस प्रकार $\frac{\lambda}{N}$ का सीमान्त मान $\frac{\lambda}{N}$ है।

इसलिए Npq का सीमान्त मान $\lambda \times$ 1 ≔ λ है।

(४) यदि दो स्वतन्त्र प्वासी-चर हो जिनके प्राचल कमश λ1 और λ2 हो तो इन दोनो चरो का योग भी एक प्वासो-चर है जिसका प्राचल (λ1-1-λ2) है।

ऊपर जिल्ले सिद्धाप्त को हम एक उदाहरण द्वारा समझने की धेपटा करेंगे । मान लीजिए एक मिल को फीज के लिए सूटों का कपड़ा बनाने का ठेका दिया जाता है । एक सूट में एक पतलून और एक कमीज है जिसके लिए कपड़ा मिल के दो बिनाम तिमागी में बनता है। बने हुए सूट में दोषों को सस्था एक याहिन्छक-चर है जिसका सटम प्लामो-बटन माना जा सकता है। यदि पतलून में दोषों को सस्था एक प्लामो-बट हो जिसका प्रत्य के स्था के पहले के स्था के पत्र कर हो जिसका प्राप्त के है और कभीज के दोषों को सस्था पर प्लामो-बर हो जिसका प्राप्त λ_2 है और कभीज के दोषों को सस्था भी एक प्लामो-बर हो जिसका प्राप्त λ_2 है तो पूरे सूट में दोषों की सस्था वर्षाने इन दोनों दोष-सस्थाओं का मोग भी एक प्लामो-बर होगा और उसका प्राप्त $(\lambda_3 + \lambda_8)$ होगा।

सूद के कपड़ों को छोटे-छोटे काको बगों में बाँटा जा सकता है और किसी विशेष वर्ग में दीय के पाये जाने की प्रायिकता बहुत कम है। इसकिए दीपयुक्त बगों की मरधा के लिए पासी-बटन का उपयोग इस स्थित में युक्ति-पुनत है। इन्हों कारणों से पूरे हैं कि पासी-बटन का उपयोग प्री युक्ति-पुनत रहराया जा सकता है। क्योंकि λ_1 से औसतन एक पतलूब में पायी जानेवाली दोपयख्या और λ_2 से अशिततन एक कनांत में पायी जानेवाली दोपयख्या और λ_3 से अशिततन एक कनांत में पायी जानेवाली दोपयख्या और λ_4 से अशिततन एक कनांत में पायी जानेवाली दोपसब्या स्वाप्त स्वाप्त से पायी जानेवाली है। यहां कुळ दोपसब्या का प्राव्य है। यहां कुळ दोपसब्या का प्राव्य है।

कपर की अस्पष्ट युवित से हम जिस सिद्धान्त पर पहुँचते है उसकी सतीयजनक ययारीति उपपत्ति नीचे दी जा रही है।

I. X=n, Y=0

2. X=n-1, Y=1

3. X=n-2, Y=2

इतमें से प्रत्येव घटना दो घटनाआ का प्रतिच्छेद है। 'और क्यांकि में दोना घट नाएँ स्वतन्त्रहें इसल्एि इस प्रतिच्छद की प्रायिकता इन दोना घटनाआ को प्रायिकताला का गुणनकल है। इस कारण इन ऊपर लिखी घटनाओं की प्रायिक्ताएँ नमग्र निम्मलिखित है—

$$1 e^{-\lambda_{2}} \frac{\lambda_{1}^{n}}{n!} \times e^{-\lambda_{2}} = \frac{e^{-(\lambda_{1} + \lambda_{2})}}{n!} \lambda_{1}^{n}$$

$$2 e^{-\lambda_{1}} \lambda_{1}^{n} e^{-\lambda_{2}} \lambda_{2}$$

$$3 e^{-\lambda_{1}} \lambda_{1}^{n} e^{-\lambda_{2}} \lambda_{2}^{2}$$

$$-1 e^{-\lambda_{1}} \lambda_{1}^{n} e^{-\lambda_{2}} \lambda_{2}^{2}$$

$$n e^{-\lambda_{1}} \lambda_{1}^{n} e^{-\lambda_{2}} \lambda_{2}^{2}$$

$$n e^{-\lambda_{1}} \lambda_{1}^{n} \times e^{-\lambda_{2}} \lambda_{2}^{n}$$

$$n e^{-\lambda_{1}} \lambda_{1}^{n} \times e^{-\lambda_{2}} \lambda_{2}^{n}$$

$$n e^{-\lambda_{1}} \lambda_{1}^{n} \times e^{-\lambda_{2}} \lambda_{2}^{n}$$

$$n e^{-\lambda_{1}} \lambda_{2}^{n} e^{-\lambda_{2}}$$

$$n e^{-\lambda_{1}} \lambda_{2}^{n} e^{-\lambda_{2}} \lambda_{2}^{n}$$

$$n e^{-\lambda_{1}} e^{-\lambda_{2}} e^{-\lambda_{2}} \lambda_{2}^{n}$$

इमलिए (X+Y) के मान n धारण करन की कुल प्राधिकता

$$P[(X+Y)=n] = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \left\{ \lambda_1^n + \binom{n}{1} \lambda_1^{n-1} \lambda_2 + \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_1)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_1)^n + \frac{e^{-(\lambda_1 +$$

लेकिन यदि (X+Y) एक प्लामा चर होता जिसका प्राचल $(\lambda_1+\lambda_2)$ होता π

q क^{उसके} मान n घारण करने की प्रायिक्ता भी $e^{-\left(\lambda_1+\lambda_2
ight)}_{n^1}(\lambda_2+\lambda_j)^n$ ही होती ।

इससे यह सिद्ध हुआ कि दो स्वतन्त्र प्यासो-चरो का योग भी एक प्यासो-चर होता है और उसका प्राचल इन स्वतन्त्र प्राचलों का योग होता है। इसी प्रकार आगमिक विधि (inductive method) से यह सिद्ध किया जा सकता है कि r स्वतन्त्र प्यामो-चरा ना योग भी एक प्यासो-चर होता है जिसका प्राचल इन प्यामो-चरों के प्राचलों का योग होता है। यह उपपत्ति इतनी सरल है कि उसको यहाँ देना आवस्यक नहीं समझा गया है।

९ ७ ५ उदाहरण

आहए हम उस उवाहरण पर पुन विचार करें जियसे हमने ध्यामी नटन का परि-चय कराया था। इसमें एक प्रार्थी को टाइपिस्ट का स्थान देने के लिए परीक्षा लेनी थी। यदि मैंनेजर उन सब पृष्ठों को फिर से टिक्न करवाता है जिनसे एक भी दोप हो तो दियद इनन का उपयोग करना होमा जैया हम पिछले अध्याय में लिख कुके है। पप्त हो सकता है कि मैनेकर ऐसा न करके केवल दोपों को ठीक कर दें। ऐसी दया में वह उन पृष्ठों को गणना नहीं करेगा जिन गर कम से कम एक रोग है पर्त्यु हुल दोपों को सक्या जानना चाहेगा। यदि यह नक्या यहुत अधिक हो तो दौपों के सुभा-प्रेप पर्यु में को श्रेप महे लगने लगेंगे। इसकी बेच्छा ऐसा डाविपट मिनुबन करने की होंगों जिसके लिए इन घोषों का जीसत बहुत कम हो। पहले जो टाइपिस्ट पा जीसतन दी पुर्जों पर सीम गलवियां करता था, यदि प्रार्थों इतनी था इसके कम पत्र निहती

अब भी प्रार्थों को नहीं परीक्षा बेने के लिए कहा जाता है जिसका पिछले अम्माम में वर्णन किया ना चुका है अर्थात उससे वार पुन्ट दिन्त करने के लिए कहा जाता है और मैंनेजर गलतियों को गिनता है। यदि वे ६ से कम हो तो इस प्रतिवर्ध में भावियों के में सब्दा में लिए में हा जाता है की स्थान जीमतन गिछले दाई पर अंदि में भावियों के अधार पर प्रार्थों के अस्वीहत करने का कोई कारण नहीं दोखता। इसके विपरित यदि वृदियों की मस्या १० हो तो यविष इस प्रतिवर्ध में जीसत पिछले टाइपिस्ट के बीसत से अधिक है तथापि प्रार्थों को अस्वीकार करने के पूर्व हम यह जानना चाहने कि विद इस प्रार्थों को अस्वीकार करने के पूर्व हम यह जानना चाहने कि विद इस प्रार्थों को अस्वीकार करने के पूर्व हम यह जानना चाहने कि विद इस प्रार्थों को अस्वीकार करने के पूर्व हम यह जानना चाहने कि विद इस प्रार्थ को अस्व भी १ ५ पूर्ट प्रतिवर्ध में १० कृष्टियाँ पावे जाने की प्राधिवता क्या है। यदि यह प्राप्य-वावा बहुन कम हो तो एक नामशील मैनेवर प्रार्थन को एकदम अस्वीहत न करने व्यक्ष हु छ और पुष्ट टिवन करने की रेगा।

आरए, हम चार टिक्त पृष्ठों में दस या उससे भी विधिक गलितमाँ होने की प्रायिकता का करने करें —

P (दस अयवा उससे भी अधिक गलतियाँ)

== 1- P (नी या उससे क्य गलतियाँ)

=I-[P (यून्य मलितयाँ) + P (एक गलनी) + P (दो गलितयाँ)....

+ P (आठ गलतियाँ) + P (नी गलतियाँ))

$$= 1 - e^{-\theta} \left\{ 1 + \frac{6}{1!} + \frac{6^2}{3!} + \frac{6^3}{3!} + \dots + \frac{6^9}{9!} \right\}$$

= 1 -- 0 916064 = 0 083936

९ ७६ प्वासी-वटन की सारणी

जैसे द्विपर बटन के असक्य उपयोग है उसी प्रकार प्वासी-बटन के भी बहुत से उपयोग हैं। अनेक मनुष्यों के बार-बार एक ही प्रकार के परिकलन करने की द्वाम मेहनत की बचान के रिक्क सार्वाम पेतार कर की गयी है। इन सारियामों में प्रके विभिन्न माने के लिए खासी बर के 0,1.2,3,... ... आदि मान धारण करने के विभिन्न माने के लिए खासी बर के 0,1.2,3,... ... आदि मान धारण करने की मापिकताएँ वे एकी है। कुछ और भी सारियामों हैं जिसमें प्वासी-बरों की स्वयी आपेक्षित बारवारताएँ वी हुई है। जब किसी को प्राधिकताओं के क्लन के लिए अपना परिकल्पनों की परीक्षा के लिए वासी-बटन का उपयोग करना होता है तब सब परिकलन नमें सिरों से नहीं करने पहते। उसे विशेष प्रभिन्न के लिए सारणी को देखना ही परिवर्ण होता है।

मीचे इस प्रकार की सारणी का एक नमूना दे रखा है। जिस सारणी का ऊपर के उसा हरण में प्रयोग हुआ है यही यहां दे रखी है। यह यान वेने मोग्य बात है कि दिएय बटन भी तरह प्रवासो-उटन भी असतत है। यह सु प्रकार को हों सी सत्या ? ऐसी नहीं है जिससे अधिक बच्च या मान होने की प्रायिवनता ठीक पाँच प्रतिश्वत वा ठीक एक प्रतिश्वत हो। परन्तु एक छोटी-ते छोटी पूर्ण-सब्या मालून की जा सबसी जिससे अधिक मान घारण करने की प्रायिवनता पाँच प्रतिश्वत से नम हो। यदि हम यह नित्यय करने कि मिसी परिकल्पना के जायारपर प्रेशित सब्या के बरायर अपना ससे वा उससे अधिक मान घारण करने की प्रायिवनता पाँच प्रतिश्वत से कम होने पर हम उस परिकल्पना को अस्वीश्वत से कम होने पर हम उस परिकल्पना को अस्वीश्वत के कम होने पर हम उस परिकल्पना को अस्वीश्वत कर दमें तो हम प्रयोग से पहले ही एक ऐसी सब्या निश्चित

कर सकते हैं कि प्रयोग का फळ उससे अधिक होने पर हम परिकल्पना को सूठी समझेंगे।

सारणी सख्या 7 3 प्राप्ती बटन ($\lambda \Longrightarrow 6$) के लिए सबयी प्राप्तिकता फलन F(r)

(2)	F (r)
(2)	0 002468
1	U 017341
-	0 061958
J—	0 151192
- 3	0 285045
4	
5	0 445668
6	0 606291
7	0 743968
8	0 847226
9_	0 916064

1	F (r)
(1)	(2)
10	0 957367
II	0 979897
12	0 991161
13	0 996360
14	0 998588
15	0 999479
16	0 999813
17	0 999931
18	0 999970
TO	0 900082

विस्तृत सारणी के छिए देखिए 'Molma's Tables''



अध्याय ८

प्रसामान्य बंदन (Normal Distribution)

६ ८ १ गणतीय वटनो का महत्त्व

अभी तक हमने दिवद और जासी-बटनों का अध्ययन किया है जो असतत है और केवन यूप-सदया मान घारण करने हैं। परन्तु हुन जानते हैं कि कुछ याद्विष्ठान कर ऐसे भी होने हैं जो हो मीमान्य मानों के बीच के सभी माना को घारण कर सकते हैं। ऐसे करों का एक उवाहरण ममुख्य को ऊँचाई है। इस प्रकार के करों का एक प्रवाहरण ममुख्य को ऊँचाई है। इस प्रकार के करों का एक पत्ति है। जेवा हम पहिले ही वेख चुके हैं, किती भी विगेष मान को घारण करने की प्राधिकता इस घर के लिए धून्य होती है। परन्तु किसी क्षाय मान को घारण करने की प्राधिकता इस घर के लिए धून्य होती है। परन्तु किसी क्षाय मान को घारण करने की शासकता के अन्तराक की स्थाप के स्थाप होते की प्राधिकता सूच्य से मित्र ही सकती है। इस प्राधिकता को अन्तराक की स्थाप होते की अपिकता सूच्य से मित्र ही सकती है। इस प्राधिकता को अन्तराक की स्थाप होते की और अप्रसर होता जाता है। जो सरपा इस पत्तक का धीमान्य रूप है वही उस अन्तराक के मध्य बिंदु पर बटन को पत्तक मान जाता है। पत्तक कलन चर के मान और उस मान से सनत पत्तक के मब्द की प्राधित करती है।

मान लीविए वि X एक ऐसा सतत वर है और उत्तरा घनत्व कलन f(x) है। यदि इस घर को ममंदिर में से हम एक प्रतिदर्श का बसन कर जिसका परिमाण ॥ हो तो प्रश्त उठता है कि इस प्रतिदर्श के माध्य का क्या वटन होगा। यदि इस घर के n मानो को जो प्रतिदर्श में विवामान है, हम $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \dots, \varkappa_{n-1}, \varkappa_n$ से सुचित करे तो हमें प्रायिवता $P\left[\frac{\varkappa_1+\varkappa_2+}{n}+\frac{+\varkappa_n}{n}\leqslant k\right]$ जा परिवज्तk के विभिन्न मानो के लिए करना है। इस प्रायिवता को हम निम्मलिखित बहुल समावल (muluple integral) से सुचित करते हैं।

$$P\left[\sum_{i=1}^{n}\tau_{i}\leqslant nk\right]=\sum_{-\infty}^{n}\int\limits_{-\infty}^{nk-\kappa_{1}}\int\limits_{-\infty}^{nk-(\lambda_{1}+\kappa_{2})}\int\limits_{-\infty}^{n}\int\limits_{i=1}^{n}$$

$$f(x_1) f(x_2) = f(x_n) dx_1 dx_2 = dx_n$$
(8 t)

सापारणतथा इस सामाकर का मृत्याकृत करना यदि अभ्यव नहीं तो बहुत कठिन जवर होता है। किक्न जैसा हम पहिले कहें बार कह चुके हैं, सारियतों में प्राप्तिकराशों के एकतम यदार्थ मान जानना जानवथक नहीं है। सरिक्ट मान (approximate value) ही यवेच्ट होता है। आपनों कही यह तो मंदेद नहीं हो रहा है कि सारियतों ने का आपन वहने कमकोर है—रसमें कुछ भी तथ्य नहीं है और सभी सिम्बटन मान हैं? अनुमान और सांभ्रयर मान था तो हर एक विश्वात में और सामारण दिक्तवर्ष में अन्तर नाहम प्रोप्त किना हो। जाता है। यह सम्बर्ध है कि बीवानिकों ने यसार्थरण समार्थ के उनहीं सहार्थ है कि वीवानिकों ने यसार्थ्य मानों के छाए पैसेन्द्र ने साथ किना हो। जाता है। यह सम्बर्ध के उनकी तारीफ दियों विमान हों। रहा खाता। परतु कोई भी बीबानिक यह सवा बहु करना कि ये माथ विक्कृत यसार्थ है।

मान लीजिए पि कोई मनुष्य एक लोहे की छड की लवाई बाप रहा है। यदि उसकी सपाय माप करने की जिद है वो यह कार्य असमय होगा। नापना सो दूर, पिल्ले दस लवाई की विरम्पाय देना ही लापन होगा। हम जानते हैं कि छड खच्चों की भानते हैं। यो अणु अस्थित होते हैं और दनमें बरावर कपन (vibration) होता रहाने हैं। यार्जातों है। कि छड की लवाई किसी विरोप शान में तिरोप देवा से सबित होगी। परतु बमा कर्मा ऐसा किया जाता है? व्यावहारिक रूप से इस लवाई की की सिप्त होगी। परतु बमा कर्मा ऐसा किया जाता है? व्यावहारिक रूप से इस लवाई से कोई विरोप अतर नहीं दिपाई देता, यदि उसको पर्म सा ठडा न किया जाय। इस कारण हम इस मामूली परिवर्तनों भी वर्ताह नहीं रूरते और एक समित्रदास जवाई नालुन करते हैं। सा लोजिल, इस आणाविक कपनी के कारण एक छड की खवाई 10 123255 सेंटीमीटर से 10 123256 सेंटीमीटर के बीच विमिन्न मानों की यारण करती रही है। इस मामूली ते अतर को आसानी से मुखामा जा सकता है। व्यावहारिक जीवन में प्राय एक प्रवेदात की स्वावत्त (precision) ययेष्ट मानी आती है। एक प्रतिवाद की यवार्यें से हमार सारख्य सह है कि यदि पर्याप्त मानी आती है। एक प्रतिवाद की यवार्यें सो हमार सारख्य यह है कि यदि पर्याप्त मानी आती है। एक प्रतिवाद की यवार्यें सा हमार सारख्य की हो की सिक्तर माप निज्यान्य और एक सी एक के वी को सिक्तर मार्च के हो से की सिक्तर मार्चा करती हमार सारख्य की हो की सिक्तर मार्चा करता हमार सारख्य के हमार की हो की सिक्तर मार्चा क्रांत एक सी हमार सारख्य के सार की हो की सिक्तर मार्चा क्रांत एक सी हमार सारख्य की सारख्य की सारख्य करता है से सारख्य की सार्च करता हमार की हमार सारख्य का है हमार सारख्य की सारख्य की सारख्य की हमार सारख्य करता हमारख्य का हमार की सारख्य की सारख्य की सारख्य सार एक सी हमार सारख्य की हमारख्य की सारख्य का सारख्य करता हमारख्य करता हमारख्य की सारख्य का सारख्य करता हमारख्य की सारख्य की सारख्य की सारख्य की सारख्य का सारख्य करता हमारख्य की सारख्य की सारख्य का सारख्य करता हमारख्य का सारख्य करता हमारख्य का सारख्य का सारख्य का सारख्य का सारख्य का सारख्य का सारख्य करता हमारख्य का सारख्य का सारख्य का सारख्य करता हमारख्य का सारख्य की सारख्य का सार

हो। भौतिकी अथवा रसायन में हमारा लक्ष्य एक प्रति दस हजार की यदार्थसा हो सकता है, परतु प्रत्येन अवस्था में यथार्थता की भी कोई सीमा होती है जहाँ रुनना ही। पडता है।

साहियकी में हम वास्तविक वटनो ना सनिकटन कुछ गणितीय वटनो (mathematical distributions) के द्वारा करते हैं । यह सन्निकट वटन ऐसा होना चाहिए कि इसके और वास्तविक वटन के सचयी-वारबारता-वटनो में कोई विरोप अतर न हो। कितने अतर तक को सहन किया जा सकता है यह व्यक्तिगत दिन और जरूरत पर निभंद है। इस प्रकार के सिक्षकटन से अमीमित लाभ है। इस गणितीय वटन के माध्य, प्रसरण और अन्य घूर्णों का परिकलन अपेक्षाकृत सरल होता है। इसके अन्य गणो की व्यास्या भी बडी आसानी से की जा सकती है। कुछ गणितीय वटनो ला समिकट बटनो के रूप में विभिन्न परिस्थितियों में विभिन्न व्यक्तिया द्वारा प्रयोग किया जा सकता है। ऐसा हम दिपद-बटन और प्यासी बटन के लिए पहिले ही देख चुके हैं। ऐसे बटनों के लिए सारणी तैयार कर ली जाती है और जब कभी भी सन्निकट बटन का उपयोग किया जाता है, इस सारणी को देखकर प्रायिकताओं का परिकलन किया जाता है। इस सारणी को देखकर प्राधिकताओं का परिकलन अथवा परिकल्पनाओं के बारे में फैसला किया जा सकता है। यदि ऐसा न किया जाय तो दो ही बातें हो सकती है-यातो जिस चर का अध्ययन कियाजारहा है उसके वास्तविक थटन का किसी को ज्ञान नहीं है। ऐसी अवस्था में यदि वह किसी सन्निकटन का उपयोग नहीं करना चाहता जो उसे चर के बारे में किसी भी निश्चय पर पहुँचने का विचार छोड देना चाहिए। यदि बास्नविक वटन ज्ञात भी हो तो चर के विभिन्न मानो के लिए प्रापि-कताओं का परिकलन या वटन के प्रतिगतता-विद्ञो (percentage points) का मालूम करना बहुत ही कठिन हो जायगा। यही नही बल्कि इस कठिनाई का सामना बार-बार हर नमी स्थिति के लिए करना होगा। इस बात की सभावना बहुत कम है कि किसी भी बास्तविक बटन का प्रयोग दबारा करने की आवश्यकता पड़ें।

६८२ प्रसामान्य वटन की परिभाषा

$$\vec{\phi}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'/\sqrt{n}}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\vec{x} - \mu}{\sigma'/\sqrt{n}}\right)^2 \dots \dots (8.2)}$$

जहाँ μ और o'^2 कमश मूल बटन के माध्य और प्रसरण है, u प्रतिदर्श परिमाण है, π एक बृक्त की परिधि और उसके व्यास का अनुपात है एव e की परिमापा नहीं है जो हम पहिले हो प्यासो-बटन पर विचार करते समय दे चके हैं।

जिन परो के बदन का रूप ऊपर लिखित यहन के प्रकार को होता है वे प्रसामान्य पर (Normal variates) कहलाते हैं और सत्मवधी बदनों को प्रसामान्य बदन (Normal distribution) फहते हैं। यह आप देख ही सकते हैं कि μ और σ'/\sqrt{n} के विभिन्न मानों के लिए हमें विभिन्न प्रवामान्य बदन प्राप्त होते हैं। इस कारण यही प्रसामान्य बदन के प्राप्त बदनके प्रशासन वदन के प्रसामान्य बदन के प्रसामान्य का मान विचलन भी हैं। प्रतिदर्श-परिमाण तो प्रसामान्य बदन के परिचय कीर प्राप्त मान विचलन भी हैं। प्रतिदर्श-परिमाण तो प्रसामान्य बदन के परिचय के प्रसामान्य का कीर स्थान कीर हमान कीर हमान विश्व प्रमामान्य चर के प्रसाम कीर कीर समानान्य कर की परिमाणा में इसका कोई स्थान नहीं है। प्रमामान्य चर के प्रसाम का कीर समान का स्थान कीर हमान कीर हमान कीर समान का स्थित की समान का प्रसाम का स्थान कीर समान का स

$$\dot{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \dots (8.3)$$

से स्चित करते है जहाँ µ और o कमश इस चर के माध्य और मानक विचलन है।

§ ८·३ प्रसामान्य वंटन के कुछ महत्त्वपूर्ण गण

प्रसामान्य वटन का उपयोग समझने से पहिले हमें उसके कुछ गुणों से परिचित हो जाना चाहिए।

(१) यदि X_1 , और X_2 दो स्वतत्र प्रसामान्य वर हो जितके प्राचल (μ_1, σ_2) और (μ_2, σ_2) है तो इन दोनों चरो ना योग (X_1+X_2) भी एक प्रसामान्य चर है जिसके प्राचल $(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_2^2+\sigma_2^2})$ होते हैं।

(२) ऊपर जिस्ति फल को आसीमक विधि से किन्ही भी N प्रसामान्य चरो पर आमू किया जा सकता। यदि इन N चरो के प्राचल कमश्च (μ2, σ2), (μ2, σ2),, (μ1, σ1),, (μΝ, σΝ) हो और यदि वे चर स्वतत्र हो तो इनका गोग

भी एक प्रसामान्य चर होता है जिसके प्राचल
$$\left(\sum\limits_{j=1}^{N}\mu_{i},\,\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{N}\sigma_{i}^{2}}\right)$$
 है।

(३) यदि प्रसामान्य चर X का गांच्य μ और प्रसरण σ^2 है तो उसका कोई मी एक-पाल फ़रून (linear function) aX+b भी एक प्रसामान्य चर है जिसके मांच्य और प्रसरण त्रमञ्ज $a\mu+b$ तथा a^3 σ^2 है । इस चर के प्राचल ऊपर-लिखित होंगे यह आसानी से देसा जा सकता है. क्योंकि

$$E\left(aX+b\right) = E\left(aX\right) + E\left(b\right)$$

$$= aE\left(X\right) + b$$

$$= a \mu + b$$
इसी प्रकार $V\left(aX+b\right) = V\left(aX\right)$

$$= a^{2}V\left(x\right)$$

$$= a^{2}x^{2}$$

जब हम कहते हैं कि किसी याद्षिक चर का पनत्व एलन f(x) है सो इसका σ^{u} यह होता है कि यदि dx छोटा हो तो x और x+dx के बीच इस चर के मान के पाये जाने की प्राधिकता लगभग f(x) dx होती है। इस तरह

$$P\left[x' < X < x' + dx'\right] = \frac{1}{\sigma \sqrt{\frac{2\pi}{2\pi}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2} dx'$$

$$P[x' < aX + b < x' + dx] = P\left[\frac{x - b}{a} < X < \frac{x' - b}{a} + \frac{dx'}{a}\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[e^{\frac{b}{2}\left(\frac{x - b}{\sigma} - \mu\right)^{2}/\sigma^{2}} \frac{dx'}{a}\right]$$

$$= \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{x - (a\mu + b)}{a\sigma}\right]^{2}} \frac{dx'}{a}$$

$$(8.4)$$

यानी (aX-1-b) एक प्रसामान्य चर है जिसके प्राचल (aµ+b, a□) है।

(४) यदि $a=rac{1}{\sigma}$ और $b=-rac{\mu}{\sigma}$ हो तो $rac{x-\mu}{\sigma}$ का घनत्व फलन निम्न-लिखित होगा ।

$$\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{8.5}$$

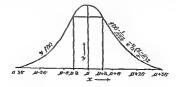
यह एक प्रमामान्य चर का धनत्व-फळ है जिसका भाष्य धृन्य तथा प्रसरण एक है। इस चर के बटन को मानिक्त प्रसामान्य बटन (standardised Normal distribution) कहते हैं। इसके N (o, r) के मुचित किया जाता है और इसे "स्वामान्य भून्य एक" पढ़ते हैं। इसी प्रकार जिस प्रसामान्य बटन का भाष्य μ तथा मानक विचलन σ हो जेरे N (μ , σ) से मुचित किया जाता है।

(५) क्रयर दिव हुए गुण से यह पता जिलता है कि यदि इस मामिनत प्रसा-मान्य बटन के प्रतिचातता-चिन्तुओं की सारणी तैयार भी जाय तो आसानी से मिसी भी प्रसामान्य बटन N (μ , σ)के प्रतिचतता बिदुओं का करून किया जा सकता है। इस प्रकार की सारणी सास्थिकों ने तैयार नर रन्ती है।

मान छोजिए, हमें किसी प्रसामान्य वटन का प्रमरण σ^2 जात है और हम इस परिकल्पना की जीन करना चाहते हैं कि वटन का माध्य μ है। हम π परिमाण का एक प्रतिदर्श (sample) छेकर प्रतिदर्श माध्य $\overline{\omega}$ का परिकल्पन कर सकते हैं। यदि परिकल्पना सत्य है वो $\frac{\overline{\omega}}{\sigma \sqrt{n}}$ एक N (o,1) चर है। इस कारण हम सारगी द्वारा

 $P\left[N\left(0,1\right)\right] > \frac{1}{\rho\left(\sqrt{n}\right)} - \frac{1}{\rho\left(\sqrt{n}\right)}$ माळूम कर सकते हैं। यदि यह प्रायिकता बहुत कम हो तो हमारा परिकल्पना पर सदेह होना और इस कारण उसे अस्थीकार कर देना स्वाभाविक है।

(६) यदि हम प्रसामाध्य चर X के मान और उसके घनत्व फलन के बीच एक प्राफ कीचें तो उसकी नकळ इस प्रकार की होगी जैंगी नीचे के चित्र में दिखायी गयी है।



चित्र २५—N(μ—σ) का धनत्व-फल

ऐसा मालूम होता है कि किसी घटी को उलट कर रख दिया हो। माध्य के दोनों ओर का बटन एक-सा होता है। जो प्रामिकता घनत्व (µ-|-a) पर होता है वही (µ--a) पर भी होता है। इस बटन का बहुलक (mode) और माध्य बरावर होते हैं। मह चर छोटे-छोटे और बडे-से-बडे हर एक मान को घारण करता है, परसु जैसे-मैसे मान माध्य से पूर होता जाता है, उसका प्रायिकता-धनत्व कम होता जाता है और क्ष्म्य की ओर अरकर होता जाता है और क्षम्य की अरकर होता जाता है और क्षम्य

६ ८·४ प्रसामान्य बंटन द्विपद बटन का एक सीमान्त रूप

इससे पहिले कि हम परिकल्पना की जीच में प्रसामान्य चर के उपयोग का अध्ययन कर जाप साय यह जानना चाहेंगे कि किसी भी बटन के लिए प्रसिदर्श-माध्य प्रसामान्य चर की ओर कैसे अग्रसर होता है। हम एक ऐसे द्विपद बटन के उदाहरण से जिसमें $p=\frac{1}{2}$ ही, इसे समझने की चेच्टा करंगे। मान लीजिए कि हम एक सिक्ते की उद्यालते हैं। इस बाद्धिक प्रयोग के सो ही फल ही सकते हैं, चित या पट। यदि हम एक प्रयाजिक को गैसी परिभागा करें कि वह जित आने पर। बौर पट आने पर α जार पट मित की प्रहाण करना है तो इस बटन का दह-चित्र (bar diagram) सीचे चित्र सवस रहे के समान होगा।



चित्र २६---हिपद (१,३) का दडचित्र

इस बटन का माच्य 1 तथा मानक विचलन भी 1 है क्योंकि µ=E(X) == 0×1/1-1×1/2 == 1

र्याद सिनका दो बार उछाला जाय और इन दो प्रयोगो से श्रवधित चरो के माध्य का परिकलन किया जाय तो वह तीन मान बारण कर सकता है—0. ई और ा और इनको प्रहण करने की प्राधिकताए कमसा दूं, ई, दूं है। इसका दड-चिन चित्र तस्या २७ में दिलामा गया है।



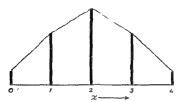
चित्र २७--द्विपद (२, है) का बंडचित्र

इसके माध्य और प्रसरण कमण ई और है है।

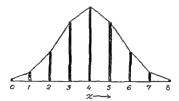
मितवर्स-गरियाण चार होने पर प्रतिबर्द्ध भाष्य गाँच मार्गा 0, र्र्ड, र्र्ड, र्ड्ड नवा 1 को कमा (३), ४ (३), ६ (३), ६ (३), विश्वाया (३) की प्राधिकता के साथ परण करता है। इस माध्य के नटम के माध्य तथा प्रसरण कमस र्र्ड तथा र्र्ड है। इसका रट-पिन चित्र सक्था २८ में दिखाया गया है।

प्रतिदर्श परिमाण 8 और 16 से सवधित वड-चित्र भी पू॰ १३६विये हुए हैं।(२९, ३० नित्र)। इन सभी चित्रो में (पहिले को लोडकर) माध्य पर की प्राधिकता को,

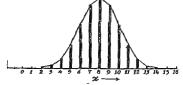




नित्र २८—द्विपद (४, ३) का दबस्तिन



चित्र २९--- द्विपद (८, ६) का दडचित्र



चित्र ३०---द्विपद (१६, ३) का दडचित्र

जो अन्य सब प्रायिकताओं मे अधिक है, एक चार सेंटीमीटर ऊची रेखा से सूचित किया गया है, यदापि विभिन्न प्रतिदर्ध निरमाणों के लिए इस मान है को ग्रहण करने की प्रायिकताएँ अलग-अलग हैं। आपने यह देखा होगा कि जैसे-जैसे प्रतिदर्श परिमाण वडता जाता है वैसे-जैसे पट-चिन के दह एक दूसरे के पास आते जाते हैं। यदि इन दड़ों के सिरों को सिलाती हुई एवं वक रेखा खीची जाय तो असे-जैसे प्रतिदर्शन परिमाण वडता जाता है वैसे-जैसे देखें इस वक की जिस की प्रतिदर्शन परिमाण वडता जाता है वैसे-वैसे इस वक की जिस की प्रतिदर्शन जाती हैं।

इससे भी अच्छी नुष्ता दो दण्डो के बीच के मानो की तत्मवणी सपयी प्रापिकताओं से हो सकती है जो इन दिपद बटनो और प्रसामान्य बटनो के आघारपर परिक्रिक्त की जाये जिनके गान्य और प्रसरण दिपद बटन के गान्य और प्रसरण के बराबर हो। नीचे कारणों में $\frac{n}{10}$, $\frac{2n}{10}$, $\frac{3n}{10}$, $\frac{4n}{10}$, $\frac{5n}{10}$, $\frac{6n}{10}$, $\frac{7n}{10}$, $\frac{8n}{10}$, $\frac{9n}{10}$ तथा n पर दिश्य बटन और प्रसामान्य बटन की सुचरी प्रापिकताएँ दी हुई है।

आगे की सारणी से यह प्रत्यक्ष ज्ञात होता है कि जैसे-जैसे प्रतिवर्ज परिमाण बढता जाता है डिपद-वटन का सचयी प्राधिकता-फलन अधिकाधिक प्रसामान्य बटन के सचयी बारवारता-फलन के बरावर होता जाता है। इस उवाहरण में हमने p और q की डिपद बटन के लिए वरावर रक्षा था। बिंद p और q में बतर बहुत अधिक हो तो इन दोगों फलनो के बरावर होने के लिए बहुत अधिक प्रतिवर्ध परिमाण की आवस्यकता होंगी।

§ ८५ वृदियों का वंटन

वैज्ञानिको ने यह देखा है कि चाहे किवनी भी होशियारी से माप लिया जाय, माप में कुछ-न-कुछ श्रुटि रह ही जाती है।

मान जीजिए कि एक पैमाना है जिसमें एक इस के दसवें भाग पर निकान लगे हुए हैं। यदि हम इसकी गदद से किसी वस्तु को इन वें सीने हिस्से तक नापना चाहते हैं तो यह काम हमारे लिए इस पैमाने से करना समय नहीं है। यदि हमारे पास नेई पैमाना नहीं हो तो हमें इस के इसरे दशमकर स्थान को अनुमान ह्यारा प्राप्त करना होगा। यह सैसे हो सकता है कि यवार्य अक का ही अनुमान हमें ? गहती होना अवस्थानी और स्वाभाविक है। यदार्थ छवाई नहीं बनी रहती है तो भी एक ही मनुष्य उस ही वस्तु को बार-बार नापने पर इस अक का ब्राज्य-अलग कर्युमान

सारणी सस्या 81 डिपटऔरप्रसामायबटनो की सत्त्रयो प्राधिकताओं की तस्त्रना

:	सास्यिको के सिद्धान्त और उपयोग														
	-	:	(12)	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	9000	0000	1000	1 0000	1 0000
	<u>5</u> ,1	01	(II)	\$000	7881	7500	8708	9375	9452	1966	1889	0007	0003	1 0000	1 0000
	811	2	(IO)	5000	7257	7500	8023	9375	8849	9648	0,045	9755	9018	2666	9997
II-G	7/8	2	3	\$000	6554	7500	71.57	6875	7881	8555	8708	9616	9452	0006	1882
क्रियन जार प्रदान। य वटना का चन्द्रा आयिष्णान का पुलना	10	01	(8)	2000	5793	7500	6103	6875	6554	6367	7157	7728	7881	8595	8708
र्था भावर	Şu	OI	(2)	\$000	2000	7500	2000	6875	2000	6367	2000	5982	\$000	\$700	3000
ट्या का स	451	OI	9	2000	4207	2500	3897	3125	3446	3633	2843	2272	2119	1077	1292
नदाना व व	311	01	S	2000	3446	2500	2843	3125	2119	1445	1292	0245	0548	0045	0110
216 916	2/3	۹	(4)	\$000	2743	2500	1977	0625	11511	0352	0455	9010	2800	0003	0003
1	* ;	2	3	3000	2119	2,500	1292	0625	0548	0039	6110	0003	1000	0000	0000
	=X/E		7	द्विपद	प्रसामाय	द्विपद	प्रसामा य	द्विपद	त्रसामा य	ब्रिप्द	प्रमामान	द्विपद	प्रसामाय	द्विपद	प्रसामाय
	प्रतिदर्भ पश्चिमा			1		~	~	4	~) or		32	=

लगा सकता है। यदि बनुमान लगाने की इस किया को बार-बार दुहराया जाय तो वास्तविक माप और इस प्रकार बन्मानित माप के बीच के जतर (जिसे मापत्रृटि कहा जा सकता है) का बटन किस प्रकार का होगा ? अनुभव के आधार पर यह जाना गया है कि इस बटन का एक जच्छा सीटिकटित रूप प्रसामान्य वटन है।

मह देवा गया है कि यदि हम किसी भी कार्य में बहुत अधिक ययार्थता प्राप्त करने का प्रयत्न करते हैं और इसके होते हुए भी कुछ बृदि हो जाती है तो यह बृदि प्रसामान्य-वर होती हैं। इसका सबसे अच्छा उदाहरण किसी छोट से निवान पर गोली मारने का प्रयत्न है। इस उदाहरण पर पहिले भी हम किसी दूसरे प्रयत्न में विचार कर पुके है। यहाँ दुवा का जरा-सा होका, बनावट में जरा-सा अतर, बदुक को साथे हुए हाथ का तिकित्सा कपन अववा अन्य कोई भी कारण वृदि उत्पन्न कर सकता है। वृदियों के प्रसामान्य वर होने का यही कारण बताया जाता है। विभिन्न कारणों से जो बृदियां होती हैं उनके विभिन्न बटन हो तकते हैं परतु समरत मेंश्वत बृदियों की सस्या इन सब विभिन्न वृदियों की सस्याओं का योग होगी। जैता हम दियर पर के लिए देख चुके हैं, यह सिद्ध किया जा सकता है कि इन अनेक चरों के योग अयया माध्य सा बटन प्राप्त महामान्य होगा।

विभिन्न कारणों के मचित प्रभाव का एक कौतूहरु-जनक उदाहरण एक व्यक्ति की लवाई है। जन्म सबधी उपादान कारणों के अलावा, जो शायद सबसे अधिक महत्वपूर्ण है, सैकडो अन्य कारण व्यक्ति की ऊबाई पर प्रभाव डालते हैं। अपर के तर्क के अनुसार यह आशा की जाती है कि व्यक्तियों की ऊबाइयों का बटन प्रसामान्य होना चाहिए और प्रेक्षण ढारा यह देखा गया है कि यदि काकी बडे प्रतिदर्ग में नुप्यों के ऊबाइयों का प्रेक्षण ढारा यह देखा गया है कि यदि काकी बडे प्रतिदर्ग में मनुष्यों की ऊबाइयों का प्रेक्षण किया जाय तो मालूम होगा कि इनका बटन रूपमंग प्रसामान्य है।

पाउस (Gauss) ने इस बटन को पहिले त्रृटियों के बटन के रूप में ही खोजा था। इस कारण इसनी त्रृटियों का बटन (Law of errors) अथवा पाउस का बटन भी कहा जाता है। आपको यह कीनूहरू होना स्वामायिक है कि इस प्रकार के जटिल बटन का विवार किया प्रकार को क्रिक को आया होगा। आपके इस कौनूहरू को गात करने के लिए इस बटन की सौद्रानिक ब्यूग्ति की स्पर्यक्षा हम नीचे दे रहे हैं। \$ ८% गाउस के जटिल बटन की सौद्रानिक क्यूग्ति की स्पर्यक्षा हम नीचे दे रहे हैं।

मान लीजिए कि किमी बस्तु का वाम्तविक माप μ (म्मू) है। इस वस्तुको यदि n बार नार्षे तो हमें विश्वन्न माप $x_1,x_2,\quad x_n$ प्राप्त होने। यदि हमें माप x_r

प्राप्त होता है तो इसमें तृष्टि (x,--μ) है। हम इस बुटिको ≈, से सृष्टित करेंगे। इस तरह

$$z_1 = x_1 - \mu$$
 , $z_2 = x_2 - \mu$, $z_j = (x_j - \mu)$, $z_{n-1} = x_{n-1} - \mu$, $z_n = (x_n - \mu)$

यदि हम नृटि के परास (range) को छोटे-छोटे अवराका में निमाणित कर दें जिन सबका परिसाल $\triangle z$ हो तो माप के z और $z+\triangle z$ के बीच में पाये जाने की प्राप्तिता दो अवयवो पर निर्भर करती है।

(१) अङ्गराल का परिमाण △≈

(२) तृटि का प्रायिकता चनत्व फलन चो तृटि विशेष ≈ से सबिधत है। इते हम ∫(≈) से सूचित करेंगे। हमारा उद्देश इस फलन ∫(z) का पता चराना है। इस फलन के बारे में पहिले इस दो अधिकारणाएँ (postulates) लेकर चलते हैं।

(१) ट के जिस मान के लिए इस फाउन का भान महत्तम हो बाता है वह है र=0

(२) ज्या ज्यो ≈ का भान बढ़ता जाता है न्या-स्यो f(x) का मान कन होता जाता है और शुम्य की ओर अग्रसर होता जाता है।

में अभिधारणाएँ अनुभव पर आवारित हैं। यदि हम चाववानी से कियी वस्तु का यसार्थ माप प्राप्त करने की चेप्टा करें तो यह स्वाभाविक है कि कम पुढि होंने की प्राप्तकता अभिक और अधिक कृटि होंने की प्राप्तकता अभिक और अधिक कृटि होंने की प्राप्तिकता कम हीनी। बहुत अभिक पुढि होता प्राय अश्वव है, इसिलए ऐसी घटना के लिए f(z) का मान गून्यमाम होता ही जाहिए।

मिद z और $z+\Delta z$ के बीच में प्रेक्षित माप के पाये जाने की प्रायिकता को W से सचित करें तो

$$IV = f(z) \triangle z \tag{8.6}$$

यदि समस्त मापी की सच्या n हो, तो z और $z+\Delta z$ के बीच के मापी की प्रस्ताशित सच्या

$$nW = nf(z) \angle z \qquad (87)$$

यदि ये सब जुटियां एक दूसरे से स्वतन हो अर्थात् एक मान के बान से दूसरे सारो के बटनो में कोई जतर न पडे तो इन जिचलनो के सचय (combination) वी प्रायित्ता L इन विभिन्न प्रायिकताओं का गुणनफल होगी।

(8 II)

$$L = f(z_1) f(z_2) \qquad f(z_n) (\Delta z)^n \qquad (8 8)$$

ऊपर के समीकरण में दोनों और का लघुगणक (logarithm) हेने पर

$$\log L = \sum_{r=1}^{\infty} \log f(z_r) + n \log(\Delta z)$$
 (8 9)

लघुनाणक की परिभाषा

यदि आन लघुनणक के उपयोग से परिचित नहीं हैं तो आपको यह जानने की इन्डा होगी कि लघुनणक क्या होता है।

आप सस्या ϵ से तो परिनय प्राप्त करही चुके हैं । $\log L$ की परिभाषा निम्न निस्ति समीकरण द्वारा दी जातों हैं ।

इसी प्रकार e M

ऊपर के समीकरणों का गुणा करने पर हम देखते हैं कि

$$e^{\log L + \log M} = LM$$
 (8 12)

इस प्रकार वो या अधिक सब्यान्ये के गुणनकल का लक्ष्मणक उनके प्यक् प्रक लक्ष्मणको का बोग होता है। लक्ष्मणक के इसी मृण का ऊपर log L के परिकलन में उपयोग किया गया है।

हम निम्नलिखित प्रतिवधा (restrictions) की दृष्टि में रखते हुए फलन

∫(z) का चनाव करते हैं।

(१) फलन ∫(z) प्रापिकता का धनत्व फलन है। इमलिए z के पूर्ण परास-∞ से +∞—में ∫(z) का समाकल (mtcgral) अथवा विभिन्न फलनो का योग 1 शोना चाहिए

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 1$$
 (8 13)

(२) इन शुटियाका माध्य शून्य है

(३) \mathbf{L} या $\log \mathbf{L}$ इन x_1x_2 x_a आदि सापा के माध्य के लिए महत्तम हो जाती है।

अवकल की परिभाषा-

यदि F(*) कोई सतत चरहो और उनका मान a=a पर महत्तन होता है। तो यह तिद्ध किया जा सबता है वि—

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{It} & F(a+h) - F(a) \\
 & h \to \infty & h & \text{o}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{It} & F(a) - F(a-h) \\
 & h \to \infty & h & \text{o}
\end{array}$$

भ्रम् ।
$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(a) - F(a-h)}{h}$$

हों हो हम कहते हैं कि फलन F(x) का x=a पर अवकलन (differentiation) किया जा सकता है और इम अनुपादों के बीमान्त मानी को वो बराबर हैं हम x=a पर F(x) का अवकल (differential coefficient) कहते हैं। इसको F(a) ते सुचित किया जाता है। इस प्रकार x के विभिन्न मानो के लिए विभिन्न अवकल प्राप्त किये जा सबते हैं और ये अवकल भी x के फलन समझे जा सकते हैं जिल्हें F(x)

अथवा dF(x) से सूचित करते हैं।

पह सिद्ध किया जा सकता है कि $\frac{d \log f(x)}{dx} = \frac{1}{f(x)} \frac{d f(x)}{dx}$, हस कारण अपर के समीकरण की निकारिजिय रूप में रखा जा सकता है (8 15)

$$\sum_{r=1}^{n} \phi(z_r) = 0 \quad \text{with } \phi(z_r) = \frac{df(z_r)/dz_r}{f(z_r)} \quad (8.16)$$

अब हम एक और अवधारणा स्वीकार कर लेते हैं। यह यह है कि ϕ (α) को एक पात सेपी (power series) के रूप में रखा जा सकता है। यांगी ϕ (α) $\Rightarrow a_n + a_n = a_n + a_n + a_n + a_n = a_n + a_n$

जहा a, a, a, इत्यादि एसे अचर (constants) है जो समीकरण

$$\sum_{r=1}^{n} \phi(z_r) = 0$$
 को संतुष्ट कर सकें।

स्योकि \$ (2,)=a0+a12+a22+

$$\sum_{r=1}^{n} \phi(z_r) \approx na_0 + a_1 \sum_{r=1}^{n} z_r + a_2 \sum_{r=1}^{n} z_r^5 + a_$$

यह सभीकरण तभी सतुष्ट हो नकता है जब उसके हर एक पर का मान गूच हो। यदि a, को छोडकर अय a, a, a, हत्यादि सब शूय हो तो भी यह ससुष्ट हो जायगा, मयोकि

$$\oint (z) = \frac{df(z)}{f(z)} dz = a_1 z$$

$$\text{and at } \frac{d \log f(z)}{dz} := a_2 z \qquad (8 \text{ rg})$$

परमुहम जानते हैं कि यदि $\log f(z) = rac{d_1}{2} z^2 + \log C$ हो

जहां C कोई भी अचर है तो $\frac{d \log f(z)}{dz} = a_2 z$ हो जाता है।

इसलिए उपर के समीकरण में हम यह मान सकते हैं कि

$$f(z) = c e^{a_1 z^2/2}$$

आपको याद होगा कि हम यह अवधारणा केकर चंठे व कि $\int (z)$ का महत्तम गान z=0 पर होता है और अँधे अँमे z का मान यू य से अधिकाधिन अंतर पर होता जाता है वैसे ही वैसे f(z) का मान थू य की और अध्यर होता जाता है। यह तभी हो सकता है जब a_1 एक ऋणारमक संस्था हो। इसिक्ए हम a_2 से स्थान पर $-\frac{1}{\sigma 2}$ लिख सकते हैं—

$$f(z) = c e^{-z^2/2\sigma^2}$$

$$f(z) = c e^{-z^2/2\sigma^2}$$

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2\sigma^2} dz = C\sqrt{2\pi} \sigma = 1$$

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2\sigma^2} dz = C\sqrt{2\pi} \sigma = 1$$

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2\sigma^2} dz = \sigma \sqrt{2\pi}$$

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2\sigma^2} dz = \sigma \sqrt{2\pi}$$

$$C = \int_{-\infty}^{1} e^{-z^2/2\sigma^2} dz = \sigma \sqrt{2\pi}$$

आप यह तो पहिचान ही गये होंगे कि यह फरून एक प्रसासान्य चर का घतत्व फरून है जिसका माध्य शुन्य और सानक विचलन क है।

९ ८'७ परिकल्पनाओं की जाँच में प्रसामान्य बंटन का उपयोग

अब आप कई परिस्थितियों से परिवित्त हो चुके हैं कहां यह आसा की जा सकती हैं कि यटन प्रसासाम्य होगा। आप यह भी समझ चुके हैं कि प्रसामान्य होगा। आप यह भी समझ चुके हैं कि प्रसामान्य बटन का जाविक्कार चुटियों के घटन के क्षप में किन अवधारणाओं को लेकर हुआ था। यह करावित्व का समझ में होने कि किसी बटन के साध्य और मानक विचकन का विदोग महत्त्व बयों है। यदि हमें किसी यादु चिकर पर के साध्य और मानक विचकन तात हैं और यदि हम एक काफी बड़ा प्रतिबद्ध हम कर लेखिए केरी हैं तो हम जानते हैं कि इस प्रतिबद्ध के साध्य और आप का बटन का प्रयोग कुछ परिकर्णाओं भी जीन के लिए निस्त प्रसार किया जात हो।

उदाहरण (१) आसाम की एक जाित में मनुष्यों की ऊंचाई का बड़े पैमाने पर अध्ययन किया गया। पता लगा कि ऊनाई का वितरण प्रसामान्य है जितका माध्य 5 मूट 6 इब और मानक विचलन 2.5 इब है। कुछ इतिहासकारों का मत है कि यह जाित राजस्वान के एन विश्वेय भाग से लगमग दो जौ वर्ष गहुल काात्म में आमी भी। यह सर्वविवित है कि इस जाित के लोग जाित के अन्यर ही विवाह करते है। और राजस्वान के उम भाग के लोग भी अन्य जाित या विदेशियों से विवाह नहीं करते । प्राणि-विवाल के उम भाग के लोग भी अन्य जाित या विदेशियों से विवाह नहीं करते । प्राणि-विवाल के आताओं के अनुसार चनुत्य की अबाई बसानुगत गुणों पर ही अधिक निभेर करती है। इस्विल्ए यदि इतिहासकारों के मत् में कुछ सच्चाई है तो इन दोनों जाित्यों के मनुष्यों की ऊबाई का विवरण एक-मा होना चाहिए। यदि इसमें अतर हो ती इतिहासकारों के मतुष्यों की कबाई का विवरण एक-मा होना चाहिए। यदि इसमें अतर हो ती इतिहासकारों के मत से विश्वास उठ जायगा।

जिसकी जाँच को जा सके । यह साश्यिकीय रूप निम्नालिखित हो सनता है । "राज-स्थान के इस विश्वेप मान की जाति में मनुष्यों की ऊचाई का वितरण प्रसामान्य है जिसका मान्य 5 फुट \mathcal{E} इस और मानक विचलन 2^{*} 5 इस है।" इस निराकरणीय पिर-करणान की जाँच के लिए इस भाग की जनस्था से एक याद्विष्ठकोकुत प्रतिदर्श लिया गया जिसमें 100 मनुष्य थे। इन मनुष्यों की ऊचाई नाषी गयी और इस प्रविदर्श में जजाइयों के मान्य का कलन किया गया। हमने प्रसामान्य वितरण के बारे में जो कुछ अध्ययन निया है उनसे हमें यह मालूम है कि \mathbf{E} \mathbf{E} का वितरण N(0,1)

अब हमें इतिहासकारों के मत को एक सास्थिकीय परिकल्पना का रूप देना हीगा

है जहाँ 🛣 प्रतिदर्श-माध्य, µ समध्ट-माध्य, σ समध्ट का सानक विचलन और mप्रतिदर्श-सच्या है। इस उदाहरण में

प्रतिदर्श की ऊँनाइयो ना माध्य ऽ फुट ७ इच पाया गया। अर्थात् रू≔ऽ फुट ७

इच और x-μ≔ा इच

$$\therefore t = \frac{1}{2.5} \times \sqrt{100} = 4$$

N(0, 1) की सारणी में देवने से हमें जात होता है कि इतना बडा मा इससे भी यह साताहरने की प्राधिवता 0 0000 से सकत है। इस कारण हमें इस तिराकरणीय" परिकल्पना को कि पावतमान के इस प्राध्य के आदि के मतुष्यों की उँजाई का वितरण प्राधानाय है—जिसका माध्य 5 फूट 6 इन और मानक विज्ञतन 2'5 इन है—स्वापने को बाब्य होना पडेगा, परन्तु यह परिकल्पना इतिहासकारों के मत का ही निरूष्य है। इसकिए इसरों स्वापन के बाब्य होना पडेगा, परन्तु यह परिकल्पना इतिहासकारों के मत का ही निरूष्य है। इसकिए इसरों स्वापन के बाव्य होना पडेगा, परन्तु यह परिकल्पना इतिहासकारों के मत का ही निरूष्य है। इसकिए इसरों स्वापन का क्यों है यह समझना कि इतिहासकारों का मत गलत है।

पाठकों का च्यान इस ओर गया होगा कि यह परिकल्पना केवल इतिहासकारों के मल पर ही निभंत नहीं है, बिल्क प्राणिविज्ञान के इतिहास के मत से सबस पत्नती है। यदि उनका मत प्रमाणित नहीं हो जुका है और उसमें पेदेह की मुख्य मुजाइस है तो इतिहासकार यह कह सकते हैं कि इस जांच से यह निरूप्त में तिकल सकता है कि प्राणिविज्ञान का यह मत ठीक नहीं है। इस प्रकार एक ही प्रयोग के नतीजें की व्याव्या
निम्न-भिन्न लोग विभिन्न तरीकों से कर सकते हैं। पूँगी स्वित्त से हमारी जांच अपेंदीन
हो जाती है। यह जोंच उसी समय कुछ वर्ष रखेगी जब जिस मत की हम पुष्टि समय
नायक करना चाहते हैं उसके अतिरिक्त और किसी भी ऐसे सत पर निराकरणीय
परिकरणना निभंत न करे जिसकी सच्चाई में सन्देत हो।

जबाहरण (२) एक कारखाने में किसी विशेष सशीन के लिए छाँ (rods) बनावी है। सपीन के लिए इन छड़ी की जमबाई १५ सेटीमीटर होना चाहिए। इस्किए कारखाने से यही उद्देश्य सामने रखा जाता है। परन्तु मनुष्य, मनीन जीर मारू के कारण कुछ-न-कुछ पुटि होना समन है। जत यह समन नही है कि प्रत्येक छड की लम्बाई दीक 15 संदीमीटर ही हो---न कम न ज्यावा। यदि इन छड़ो का निर्माण-नार्य विष्कुल नियमित है तो यह देखा जाता है कि इनकी स्थ्याई का वितरण प्रसामग्य होता है विसका माध्य 15 सेंटीमीटर और पानक विचलन 01 सेंटीमीटर है।

एक दिन किसी यादुच्छिक रूप से जुने हुए समय पर 16 छड़ों का एक प्रतिस्थें छिया गया। इन सक्की छम्बाई नापी नयी और उनके माध्य का करून किया गया। यह माध्य 151 सेंटीमीटर था। अन तय यह करना है कि 15 सेंटीमीटर से इस माध्य का असर क्या गह इंगित करता है कि निर्माण-कार्य हम समय नियवण से बाहर था।

^{*}प्रयोग द्वारा जिस परिकरपना के बारे में यह निर्णय करना होता है कि वह निराकरण करने के योध्य है अथवा नहीं उसको निराकरणीय परिकल्पना (nolli hypothesis) कहते हैं।

इसको तय करने के लिए पहिले हम इस निराकरणीय परिकल्पना से आरभ करेंगे कि निर्माणकार्य नियम्तित था। इसका लयं यह होगा कि यह प्रतिदर्श एक समिष्ट में से लिया गया है, जिसका वितरण प्रसामान्य $N\left(15,01\right)$ है। आइए, हम देखें कि इस प्रयोग में 4 का मान क्या है।

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$
$$= \frac{15 \text{ I} - 15 \text{ O}}{\text{O I}} \sqrt{16}$$

उदाहरण (३) मनुष्यों की बृद्धि को नापने के लिए एक प्रकार का परीक्षण पैनार किया गया है जिसे बृद्धि-परीक्षण (mtellegence test) कहते हैं। इसमें 200 मा 300 छोटे छोट प्रकार पुक्क काले हैं जिनके उत्तर एक निर्विष्य कमा ने देने होते हैं। इन उत्तरों पर नम्बर विश्वे जाते हैं और यदि किमी को इस परीक्षा में 60 प्रतिकात से कम नम्बर मिले तो उसे असतीपजनक समझा जाता है। एक विश्विक्षणक की और से 20 वर्ष पूर्व इम परीक्षा का उपयोग हजारों विद्याधियों पर किया गया था। यह देवा पसा कि इस प्रतिकात विद्याधियों का परीक्षा-फल असतीपजनक था। इस पेरे ये जिनका परीक्षाफल असतीपजनक था।

एक बैतागिन का कहना है कि इस प्रयोग से वह बालून होता है कि कुल मनुष्यों में बुढिमान मनुष्यां का अनुषात जितना 20 वर्ष पूत्र पा उससे आज अभिक्त है। यहाँ पुढिमान मनुष्यों से वैद्यागिकों का तात्पर्य उन मनुष्या में है जिल्हें बुढि परीक्षा में 60 प्रविद्यात से अधिक नम्बर मिले। हमें यह देखना है कि इस वैद्यागिक का कपन कहा तक स्नितस्वत है।

पाठक निश्चय ही यह सोचेंगे कि ऐसी स्थित में दियत्नटन का उपयोग करना चाहिए, क्योंकि हमें यह जॉन करनी है कि इस प्रतिदर्श में बुद्धिमान् मनुष्यो का जो अनुपात है उतना या उससे अधिक अनुपात होने की प्राधिकता क्या है। यदि यह समझ िया जाय वि अब भी समस्य में अनुभात 90 प्रतिस्त ही है तो पाठना ना यह विचार ठीक है। परनु द्विपद-बटन ने प्रयोग में नुछ निठनाई है। जैसा वि पहले जिसा का चुना है N न 50 से अधिन मान ने लिए द्विपद-बटन नी कोई सारणी प्रस्तुत नहीं है। इसलिए द्विपद-बटन ने कोई सारणी प्रस्तुत नहीं है। इसलिए द्विपद-बटन ने प्रयाग ने लिए स्वय इस प्राधिन ता न नल नला हागा। यद्यिप यह पिठन नहीं है परन्तु इसमें बहुत समय लगेगा। इस नराल द्विपद बटन ने म्यान में हम इस बटन ने विमी सिनंदरन (approximation) का उपयोग कर सकते हैं जिससे करार दी हुई निराकरणीय परिकल्पना नी जॉन कुछ मिनाम में हो हो सकती है।

डियद-वटन का माध्य है
$$Np=64\times0$$
 10 $=6.4$ % प्राप्त मानक विचलन है $\sqrt{Np} q=\sqrt{64\times0$ 10 $\times0$ 90 $=8\times0$ 30 $=2.40$

इसिल्प इस द्विपद-बटन का सिनिक्टन एक प्रसामान्य बटन से किया जा सकता है जिसका माध्य 6 4 और मानक विचलन 2 4 है। बयाकि विद्यार्थियों के इस प्रतिदर्श में अमतोपजनक फरू पानेवाला की सब्सा 8 का यह बटन है

इसलिए। $=\frac{n-6.4}{2.4}$ का बटन प्रसामान्य है जिसका माध्य o और मानक विचलन 1.81

$$t$$
 का प्रेक्षित मान है = $\frac{5-6.4}{2.4}$
= $-\frac{1.4}{2.4}$
= -0.583

! ना इतना कम या इससे भी नम मान के होने की प्रायकता 30% से भी अधिन है। इसलिए यदि कम-युद्धिमान् मलुष्या की प्रतिशतता अब भी 10% ही हों, किर भी हम सी बार में तीस बार यह उम्मीद नर सनते हैं कि 64 विद्यास्थित के प्रति-स्टों में 5 या उससे भी थोडे नभ-युद्धिमान् विद्यार्थी पाने आर्येंगे। यह प्रायिनता इतनी अधिक है कि इस प्रयोग से इतना बडा निष्कर्ष निकाल लेना युक्तिधुक्त मालूम नहीं होता कि अब बुद्धिमान् मनुष्यों का अनुपात बढ गया है।

यद्विप प्रसामान्य चटन के अनेको और विभिन्न उपयोग है, परन्तु आप अब तक परिकल्पना की जीन में इक्के उपयोग को काफी समझ पुके होंगे। और अधिक उदा-हत्य देने की आवश्यकता नहीं है, नयोकि चाहे किसी विज्ञान में या किसी परिकल्पमा की सौच के लिए इसका प्रयोग किया जाय विज्ञान्य और तरीका बही रहेगा।

परणु यदि आपका वृद्धिकोण आलोचनात्मक है तो आपको प्रसामान्य यदन और प्वामा बदन के उपयोग के बारे में एक सदेह अवस्य उठा होगा । इन उपयोगो में आपका ध्यान इछ ओर गया होगा कि कई बार मूळ समस्या यह नहीं होती कि प्रतिवर्ध एक विशेष प्रमामान्य अयवा प्यातो समिटि ने किया गया है। बिक्त कह केरार समिटि के माध्य अयवा प्रानक विचलन से सबस रखती है। प्राय सभी उदाहरणों में हानने यह कहा है कि एक बहुत बडे प्रतिवर्ध के आधार पर हम यह जानते हैं कि बदन प्यासों है अयवा प्रसामान्य है या वह आयदाकार है। लेकिन यह स्पट्ट है कि इस बड़े रितर्द्ध में चर का बदन ठीक प्रसामान्य अयवा प्याती होना असमय है। इस प्रतिवर्ध में चर के वास्तिवर्ध बटन और गणितीय बटन में अत्तर के महस्य को माणने के लिए भी तो कोई परीक्षण होना चाहिए। इसका विवरण हम अपले अध्याय में देंगे जिसमें हमारा परिलय एक पर्थ बटन प्र-डिवर (काई-यग बटन) से होगा। जिस समस्या का यहाँ हमने उत्लेख किया है उसके अलावा अग्य समस्याओं के सुलक्षाने में उसके प्रमीन का वर्णन भी वहाँ किया जायेगा।

सारणी संख्या 82

प्रसामान्य वटन Ν (μ, σ) के कुछ प्रतिशतता बिंदु

-	प्रतिशतता	50	25	10	05
	<u>x-μ</u>	1 65	1 96	2 33	2 58

विस्नृत सारणी के लिए देखिए

"Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research" By Fisher and Yates



६९'१ याद्याच्छिक चर के फलन का बटन

मान स्रीजिए कि एक बाद् न्छिक चर X का बनत्व-फरून f(x) है । यदि g(X)इस चर का कोई एकस्वनी (monotonic) फलन हो तो इस फलन का धनत्व-फलन क्या होगा ? यदि हम इसको /ू (x) से मूचित करें तो

$$f_1(x) = \lim_{\theta \to 0} \frac{P\left[x < g(X) < x + \theta\right]}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{P\left[g^{-1}(x) < X < g^{-1}(x + \theta)\right]}{\theta}$$

यहाँ $g^{-1}(x)$ से हम X के उस मान की सूचित करते हैं जिसके छिए g(X) = xहो। क्योंकि हमें X का घनत्व-फलन ज्ञात है, इसलिए

 $P[g^{1}(x) < X < g^{1}(x + \Theta)]$ (देखिए ६४२१) का परिश्रलन विद्या जा सकता है।

5 ९२ X2 का वंटन

जवर दिये साधारण नियम का एक बहुत ही सरल उदाहरण वह है जब

$$g(X) = X_{3}$$

$$g_{3}(X) = X + G \int_{1/2}^{1/2} x^{-1} \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \frac{x}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x} - 1 \right) \frac{1}{2} \frac{x}{x} + \frac{1}{2} \right]$$

$$g(X) = X_{3}$$

^{*}यदि 🛪 का कोई फलन 🥊 (x) ऐसा हो जिसका मान 🗴 के बढ़ने के साथ विना घटे बढ़ता जाय अथवा विना बढ़े घटना जाय तो उस फलन को अ का एकस्वनी फलन कहते हैं।

यदि (बहुत छोटाहो तो (वैशीर () के अन्य कॅने पातो (powers) की उपेक्षा की जा सकती है।

यदि X का धटन N (0,1) हो तो

$$P[x < X^{2} < x + C] = \frac{1}{2} C x^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x^{2}/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x^{2}/2} \right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C x^{\frac{1}{2}} e^{x^{2}/2}$$

. यदि X का वटन N (o,1) हो तो Xº का घनत्व फरुन

$$f_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x/2}$$
 (92)

मह बटन 1 स्वातत्र्य-संख्या (degree of freedom 1) बाला xº-वटन महळाता है। जिस चर ना ऐसा बटन होता है उसे x1 चर महते हैं।

१९३ × वर की परिभाषा

इस प्रकार के n स्वतत्र χ_1^2 , चरा के गोग को χ_n^2 से मुचित करते हैं और इस चर को u स्वतन्त्र-य-यक्षा नात्र χ^2 —वर कहा जाता है। यह सिद्ध किया जा सकता है कि इस चर का धनत्य-कन्न f_n (x) निम्निकिशत होता है।

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \Gamma_{\binom{n}{2}} x^{\frac{n}{2} - 1} e^{-x/2}$$
 (93)

यहाँ [(n) निम्नलिखित समावल (ustegral) का मान है

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{\frac{n}{2}-1} dx$$

यह स्पष्ट है कि χ_{g}^{2} केवल प्रनारमक मान ही धारण बर सकता है और सब धनारमक मान की धारण कर सकता है। क्योंकि $f_{g}\left(x\right)$ इस याद्रिक्कि वर का धनत्व-फन्न है स्विक्षर

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2^{n}} \Gamma(\frac{a}{2}) \quad x^{\frac{n}{n}-1} \quad e^{-x/a} \quad dv = 1$$

$$\text{with} \int_{0}^{\infty} x^{\frac{n}{n}-1} \quad e^{-\frac{a}{2}} \quad dx = 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{a}{2}) \qquad (9.4)$$

यह फल n के प्रत्येक मान के लिए सत्य है।

§९४ x= वटन के कुछ गुण

यदि 🔏 का वटन 🗶 है तो

$$\begin{split} E\left(X\right) &= \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{2^{n} \int_{1}^{n} \left(\frac{x}{x}\right)} \quad v^{-\frac{n}{2} \cdot 1} e^{-x/2} dx \\ &= \frac{1}{2^{n}} r \Gamma\left(\frac{x}{x}\right) \quad \times 2^{\frac{n+2}{2}} \Gamma\left(\frac{n+r}{2}\right) \end{split}$$

$$= 2 \int_{\Gamma (\frac{n+\alpha}{2})}^{\Gamma (\frac{n+\alpha}{2})}$$

 $\Gamma(x)$ एक फलन है जिसमें कुछ विशेषताएँ है। उनमें से एक यह है कि $\Gamma(x+1)=x$ $\Gamma(x)$ । यह xके सब धनारमक मानो के लिए सत्य है। इसलि

$$\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{-1}$$

$$\therefore E(x) = n \tag{9.5}$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि किसी x-बटन का माध्य उसकी स्वातत्र्य-मख्या के बराबर होता है।

(2)
$$V(X) = E(X^{2}) - E^{2}(X)$$

$$E(X^{2}) = \int_{0}^{\infty} x^{2} \frac{1}{n^{2}\pi} \frac{1}{\Gamma(2)} x^{2} \frac{1}{n^{2}\pi} e^{\frac{x^{2}}{3}} dx$$

$$= \frac{1}{2\frac{n^{2}\pi}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{2}{2}$$

$$= \frac{2^{2}\pi}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{n+2}{2} \frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})$$

$$= n(n+2)$$

•
$$V(X) = n(n+2)-n^2$$

= $2n$ (9 6)
(3) दो स्वतन x^2 - बरो का सोय

मान लीजिए कि X_j काई x_n^2 चर है और X_j कोई x_n^2 चर है और ये दोनो चर एक दूसरे से स्वतन हैं। इनको क्रमझ n_1 सवा n_2 चरो का बोग समझा जा सनता है जो एक दूसरे से स्वतन हो और किनका बटन x_1^2 की जाति का हो। इसलिए दन दो चरो का बोग (X_1+X_2) एक $x_{n-1-n_2}^2$ चर है।

इसी प्रकार कई स्वतत्र $x \stackrel{2}{\sim}$ चरा का योग भी $x \stackrel{2}{\sim}$ द होता है और उसकी स्वातच्य-सस्या इन विभिन्न $x \stackrel{2}{\sim}$ चरो की स्वातच्य-सस्याओं के योग के बरावर होती है।

§ ९'५ समिष्टि को पूर्ण रूप से विनिर्दिष्ट (speafy) करनेवाली परि-कल्पनाओ के लिए x परीक्षण

यदि निराक्तरणीय परिकल्पना समिष्ट को पूर्ण रूप से विनिदिष्ट करती हो और यदि इस समिष्टि से चुना हुआ एक ययेष्ट परिमाण का याद्गिच्छ प्रतिदर्श आप के पास हो तो इस परिकल्पना की जांच आप करेंग्रे करेंगे ? माम कीजिए कि परिकल्पना रह हैं कि समिष्टि N (μ , σ) है। इसके लिए एक परीक्षण का परिचय आप प्रसामान्य बदन के उपयोग के सक्षय में या चुके हैं। पर्यु वह परीक्षण किसी हद तक समिष्टि के माम्य μ से अधिक मन्या प्रसामान्य । यदि प्रतिवर्श का माम्या μ के बरावर अपया उन्नके अपयत निकट होता तो समिष्ट के असामान्य न होते हुए भी हम उस परिक्षण द्वारा परिकल्पना के विकट संसला नहीं दे सवते थे। यदि समिष्टि प्रमामान्य में होते पर्यु उत्तक बास्तिक प्रसरण परिकल्पन प्रसामान्य σ होता तो भी यह परिकल्प हसकी जाँच नहीं कर सकता था। निक्षय ही आप रहे परिक्षण स्ताम के स्ति के स्ति हम स्ति हम उस परिक्षण के स्ति हम उस परिक्षण के स्ति हम उस परिक्षण के स्ति के स्ति हम उस परिक्षण के स्ति हम उस परिक्षण के स्ति हम उस परिक्षण सार्थिक में कोज निकाल है। यह न केवल प्रसक्त मान्य से। ऐसा एक परिक्षण सार्थिक में कोज निकाल है। यह न केवल प्रसामान्य अपया जातो वज्यो से समिष्य है वरम् प्राम किसी भी बटन से सम्वति परिकर्पना की जाँच के लिए उपयुक्त है। इस परीक्षण के आवश्यकत होंगी है।

मान लीजिए कि बाव्चिक चर जितने मान धारण कर सकता है उन सबके हुकि (set) को S से मूचित किया जाता है। मान लीजिए इस कुक्क को r भागों में विमाजित कर दिया जाता है, जिनको कमार S₁, S₂, , S₃ से मूचित किया जायगा। उदाहरण के लिए यदि थाद् क्किन चरका वटन द्विपद है जिसके प्राचक (parameters) 6 और v है तो S किन्निलिखत मानोबाल करूक है—

0, 1, 2, 3, 4, 5 और 6

यही वे मान है जो कि ऊपर दिया हुआ द्विपद चर धारण कर सकता है। इन सात मानों के कुछक को सुनिधानुसार कई भागों में विभाजित किया जा सकता है। यदा, मान छीजिए पहिले भाग में 0, 1 और 2 है, दूसरे में 3, तीसरे में 4, और चीमें में 5 स्वा 6। ये भाग परस्पर अपवर्जी (mutually exclusive) तथा नि सेपी (exhaustive) है अर्थात् अ तर प्रत्येक गान किसी-म-निस्ती भाग में समिमिति हो गया है। हम याद्ष्टिक चर के बटन के आधार पर उसके इन विभिन्न भागो में होने की 'भाषिकता का पीरकलन कर सकते हैं। ये प्राधिकताएँ निम्निटक्षित है

$$P(S_1) = (1-p)^6 + 6(1-p)^5 p + 15(1-p)^4 p^2$$

$$P(S_2)=20(1-p)^3p^3$$

$$P(S_3) = 15(1-p)^2p^4$$

$$P(S_4) = 6(1-p)p^5 + p^6$$

यदि हम P (S,) को P, हारा मूचित करें ती

$$\sum_{i=1}^4 p_i =: 1$$

क्योंकि ये कुलक परस्पर अपवर्जी तथा नि शेपी है।

मान लीजिए कि n परिमाण का एक याद्ध्लिक प्रतिदर्श चुना जाता है और इन विभिन्न कुलको में चर के प्रेक्षित मानो की सख्या कमश $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\ell$ है।

हमारा पहिला उद्देश्य तो एक ऐसे माप को भालूम करना है जो प्रतिदर्श-वटन तथा परिकल्पित बटन के अंतर का आमास दे सके। परिकल्पना के आधार पर प्रतिदर्श में प्रत्यागित बारबारता कमश

$$np_1, np_2, \dots, np_r$$

थी। जो माप हम बाहते हैं उसे स्पटतया इन प्रत्याधित बारबारताओं और प्रेक्षित -बारबारताओं के अंतरों का फलन होना चाहिए। इस प्रकार का एक फलन निम्नलिखित है

$$\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{r} (y_i - np_i)^2 \\
np_i \\
= \sum_{i=1}^{r} \frac{y_i^2}{np_i} - n \\
= \sum_{i=1}^{r} \frac{y_i^2}{np_i} - n
\end{array}$$
... (9 ?)

कार्ल पियरसम (Karl Pearson) ने यह सिद्ध किया था कि इस ऊपर लिखित गाप की कुछ विद्येपताएँ हैं। जैमे-जैसे अतिदर्ज परिमाण n को नदाया जाय इस माप गायटन ऐसे X² नटन की ओर अग्रसर होता जाता है जिसकी स्वातत्र्य-सस्या (r-1)है। इस बटन की उपपत्ति (proof) यहां नहीं दी जा रही है।

इस गुण के प्रयोग से एक और परिकल्पना-परीक्षण तैयार कर सकते है जिससे इस परिकल्पना का परीक्षण किया जा सकता है कि यादृष्टिक चर के विभिन्न कुलको में होने को प्राधिक्ताएँ कमरा p_1, p_2, \dots, p_r है । यह निराक्रणीय परिकल्पना स्वय एक दिरोप बटन पर आधारित है । यदि इस निराक्रणीय परिकल्पना को सदेह-जनक समक्षा जाता है तो इस आधार बटन पर सदेह होना की स्वामाविक हैं ।

मान लीजिए $x_{r_1}^p(p)$ द्वारा हम उम मान को मूचित वरते हैं जिसते अधिक होने की प्राधिवता—िवनी $x_{r_1}^p$ चर के लिए — p प्रतिवाद है। यदि p इतना छीटा हो कि इतनी कम प्राधिवता वाली घटना का होना प्राय असमन समझा जाय और यदि प्रतिदर्श-परिमाण इतना अधिक हो कि x को एक $x_{r_1}^p$ चर मानत जा सके तो हम आज्ञा वरते हैं कि यदि परिकल्पना सत्य है तो x का मानत $x_{r_1}^p(p)$ से अधिक नही होगा। यदि x^p का प्रेक्षित मान $x_{r_1}^p(p)$ से अधिक हो तो हम परिकल्पना पर मदेह फरने और उसकी त्यापने के लिए बाध्य हो जाते हैं। इस सख्या p को इस परीक्षण का सार्थकता-स्तर ([evel of significance) कटते हैं।

९९६ x = वटनो की सारणी

अनुमन से जात हुआ है कि यदि प्रतिदर्श-गरियाण इतना अधिक हो कि प्रतिक प्रत्याधित आवृत्ति np, पाँच या पाँच से अधिक हो तो हम X—रटन का अपोण कर मकते हैं। यदि विश्वी कुछक में प्रत्याधित वारवारता पाँच से क्य होती है तो उस कुछक को समीप के किमी अप्य कुछक से मिका दिया जाता है कियते इस बढ़े हुए कुछक में प्रत्याधित वारवारता पाँच से क्य कुछक से मिका दिया जाता है कियते इस क्य हुए कुछक में प्रत्याधित वारवारता पाँच या उससे अधिक हो जाय। साधिकरों ने हम प्रकार के परीक्षण के छिए एक सारणी बना रखी है। इसमें 1 से 30 तक की स्वान्ध्य-स्व्याओं को X— वटनों के छिए, तथा p के विश्वित्र मातों के छिए, X p के मान विये हुए हैं। इस सारणी का उपयोग केवछ उसी स्थित में छिया जाता है जब स्वात्थ्य-सक्या (r-1) तीस या तीस से कम हो। यदि यह तीस से भी अधिक हो तो हम रोताइए फिसर हारा खांजें हुए इस गुण का प्रयोग कर सकते हैं कि p के वर मानों के छिए, X x का वटन प्राय प्रसामान्य होता है और उसवा माध्य $\sqrt{2n-1}$ स्वा

६ ९७ आइए अब हम दो-तीन उवाहरणो द्वारा इस सिद्धान्त को अच्छी तरह से समक्ष छे

उराहरण (१) कुछ लाग का निक्यास है कि विभिन्न बह और अन्य लाकासाय रिंड सप्ताह के अलग-अलग दिनों पर राज्य वरते हैं। वे ये भी विश्वास करते हैं कि इन प्रहा का वर्षा पर अलग अलग प्रभाव पडता हैं। इस तरह वे आभा करते हैं कि यदि कुल बर्षा के विशो की जाव की लाय तो मालूम होगा कि उनमें सोमवार की अपेक्षा इतवार अधिक हैं, मगलवार की अपेक्षा सोमवार अधिक हैं इत्यादि। प्रानी विभिन्न वारों को वारवारताएँ भिन्न भिन्न होगों। हम यहाँ उपयुक्त मूल विश्वास की विकेषना नहीं करना चाहते वरन उस विश्वास से सर्विद्य वर्षा के बिनो के बारे में एक साल्यियीय परिकल्पना की लॉच से ही सत्तीय कर लेंगे।

हमारी निराकरणीय परिकल्पना H_0 यह है कि यथी की रिववार सोमवार, मणवार, बुधवार, बृहस्पतिवार, गुकवार एव सिनवार को होने की प्राधिकताएँ ममान है। यदि इन प्राधिकताओं को p_1 p_2 p_3 p_5 p_6 और p_7 से सुचिव किया जाय तो H_0 यह है कि $p_2 = p_2 = p_3 = p_6 = p_7 = p_8$ और इनका निकल्यं यह है कि प्राधिक परिष्ठिक की वर्षों के दिनों के अंकिकों का विश्लेषण करें वो उसमें सप्ताह के प्रारंक कार का प्रतिनिधित्व रूपभण समान होगा।

प्रयोग—किसी विकोध स्थान के मीसम बैतानिक पफ्तर (meteorological office) से हम पिछले 301 बनी के बिनो का विश्लेषण करके जनमें विभिन्न बारी की वास्तारता का बता लगायेंगे।

सार्थकता-स्तर (level of significance)

हम यह पहिले से ही तय कर लेते हैं कि यदि प्रेक्षित बारबारताओं की इस परि-कलना के आशारबर परिकल्कित प्राधिकता गाँव प्रविचात से कम द्वीची तो हम परिकलना का लाग कर देंगे। इसकिए इस प्रयोग का सार्थनता स्तर p 3 प्रविचात है।

अस्वीकृति-क्षेत्र (region of rejection)

यदि χ^2 -का प्रेक्षित मान χ^2 के सारणी में दिये हुए पाच प्रतिशत बिंदु 12 592- से अपिक हो तो हम निराकरणीय परिकल्पना H_* को त्यान देंगे अश्रवा उसे अस्बीकार करेंगे l

(देखिए मारणी सख्या 9 8)

आंकडे (data)---

यपी के दिनों की सात कुलका में विभाजित किया गया है। हर एक कुलक सप्ताह के एक विशेष बार की हुई वर्षा से सब्धित है। नीचे सारणी में इन कलका में प्रेक्षित वारवारताएँ दी हुई हैं। निरकरणीय परिकल्पना के अनुसार हर एक कुलक की प्रत्या शित बारबारता 301 = 43 है।

सारणी सख्या १ १ पिछले २०१ वर्षों के दिनों में विभिन्न वारों की जारवारना

रविवार	सोमवार	मनलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
55	4.2	37	48	52	34	32

विक्लेयण ---

$$\begin{split} x^2 &= \sum_{i=1}^{7} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} & (बेखिए समीकरण 97) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[(12)^2 + (0)^2 + (-6)^2 + (5)^2 + (9)^2 + (-9)^2 + (-11)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[1444 + 0 + 364 + 25481 + 81 + 121 \right] \\ &= 418 \\ &= 11340 \end{split}$$

फल--स्पोकि x का प्रेक्षित मान 12 592 से कम है इसलिए इन ऑकडो के आधार पर निराकरणीय परिकल्पना को अस्बीकार करने का कोई कारण नहीं है। उदाहरण (२)

अब हम फिर उस उदाहरण को लेते हैं जिसमें हमने इतिहासकारों के मत का प्रमामान्य वटन द्वारा परीक्षण किया था। इसमें निराकरणीय परिकल्पना यह थी कि राजस्थान के एक विशेष भाग के लोगों की ऊँचाई का बटन प्रसामान्य है जिसका माध्य ५ फट 6 इच और मानक-विचलन 2 ९ इच है।

हम पहिले ऊँचाई h के परास (range) को बाठ भागों में विभाजित करते हैं

- (1) b < 4 फट 10 5 इन (2) 4 फूट 10 5 इच ≤ h < 5 फूट 1 इच
 - (3) 5 জুট ɪ হৰ ≤ h < 5 জুট 3 5 হৰ

(6) 5 फुट 8.5 इस
$$\leqslant h <$$
 5 फुट 11 इस

(8) h ≥ 6 फूट 15 इच

नीचे की सारणों में राजस्थान के उस भाग के एक 200 परिमाण के यादृष्टिक प्रतिकरों में इन आठ मानों के लिए बारबारताएँ दो हुई है। इन प्रेक्षित बारबारताओं के नीचे प्रत्यातित बारबारसाएँ भी दो हुई है जिनका परिकलन नियकरणीय परिकल्पन के मामार पर किया गया है।

सारणी संख्या 9.2

भाग	ı	2	3	4	5	6	7	8
प्रेक्षित वारबार ता	3	16	23	60	65	r8	14	r
प्रत्याशित बारबारता	0.27	4 28	27 18	68 27	68 27	27 18	4 28	0 27

अस्वीकृति-भेत्र —हम ऊपर के ऑकडो के विश्लेषण से पहिले ही वह तय गर चुके हैं कि यदि प्रेकिंत x— का आन समुचित x— बटन के पान-प्रतिशत-विदु से सथिक होगा सो निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत कर दिया आयना ।

हम यह देखते हैं कि पहिले वो और अधिक दो कुलको में मत्यापित बारबारताएँ पाँच से कम है। इसलिए \mathbf{x}^{-} का परिकलन करने से पूर्व पहिले, दूसरे और नीसरे उनते को मिलाकर तथा छठतें, सातवें और आठवें कुलको को मिलाकर दराने बढ़े कुलको को मिलाकर दराने बढ़े कुलको को पालाकर परामें बढ़े कि वास । दस प्रकार

 $rac{\pi}{2}$ न चार कुलक रह गये और यदि प्रेसित χ^2 का मान χ^2_s के पांच-प्रतिगत-ियःg 7-815 से जॉयक हो तो हम निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकार करेंगे । (देखिए सारणी सच्या 9-8)

बिश्लेषण्
$$\chi^2 = \frac{(42.00 - 31.73)^2}{31.73} + \frac{(60.00 - 68.27)^2}{68.27}$$

$$+ \frac{(6500 - 6827)^2}{6827} + \frac{(3300 - 3173)^2}{3173}$$

$$= \frac{10547 + 515}{3173} + \frac{6839 + 1069}{6827}$$

$$< 7815$$

निरुषये—स्योक्त x का प्रेक्षित मान 7 815 से कम है इसलिए इन ऑकडो के आधार पर परिकल्पना अस्त्रीष्ट्रत करने का कोई कारण नहीं है !

६९८ आसजन-सौग्ठव का x= परीक्षण

आपका ध्यान सम्भवत एक बात पर गया हो कि क्रमर की निराक्तरणीय परिकल्पना को बिना कियी परीक्षण के ही अर्थीकृत किया जा सकता था। किसी भी प्रसामान्य बटन में क्यान्यक साम पारण करने को प्रांपकता गूना नहीं होगी जब कि ऊँचाई के लिए यह प्रांपिकता क्षमा का प्रांप करने को प्रांपकता गूना नहीं होगी जब कि ऊँचाई के लिए यह प्रांपिकता अवस्था हो चून्य है। क्षणताम ऊँचाई वर्ष-मून्य है। नास्तव में जब कहते हैं कि क्या अवस्था है कि क्या के का क्षमा कर कहते हो के कहते हैं कि स्वयन प्रसामान्य बटन से इतना अधिक साव्यय रखता है कि किसी भी अप-पूर्ण परास में क्रमाई के बार का प्रांप का करने से कोई विचेष प्रांपित यह होने की प्रांपित के साव किया प्रांपित यह होने की परिकल्पना का परिक्षण करते हैं होगी। प्राय जब हम समित्व के एक विशेष प्रणिताय वटन होने की परिकल्पना का परिक्षण करते हैं इसी प्रकार के तर्क का प्रयोग किया जाता है। कोई भी सावियक कभी भी ग्रंपीरता है यह विचार गृही कर सकता कि यह परिकल्पना एकदम वपार्थ है। सकती है। इस परीक्षण का तात्यमें क्ष्मक यह जानना है कि यह विशेष प्रणिताय है। का स्वर्ण प्रमुद्ध वपार्थ है। सकती है। इस परीक्षण का तात्यमें क्ष्मक यह जानना है कि यह विशेष प्रणिताय बटन समर्थित का अव्या स्वर्ण प्रकार व्यवस्था है। का सम्बर्ण प्रमुद्ध व्यवस्था है। का सम्बर्ण है कि यह विशेष प्रणिताय बटन समर्थित के अवस्था नाही।

इस प्रकार के परीक्षण को आसजन-सीय्ठव (goodness of fit) का X-परीक्षण कहते हैं।

९९९ समप्टि को अपूर्ण रूप से विनिदिष्ट करनेवाली परिकल्पनाओं के *लिए √ स्पोक्षण*

ऊसर के उदाहरण में परिकल्पना में समिटिक के μ और σ के मानो के द्वारा समिटि को पूर्ण-रूप से विनिर्दिष्ट किया हुआ था। कुछ परिकल्पनाएँ इतनी स्पष्ट नहीं होती। वे यह नहीं बवाती कि समस्टिक्या है वर्ग् केवल उसकें रूप (shape) से सबय राजों है। उदाहरण के फ़िए हमारी परिकल्पना यह हो सकती है कि ऊँचाइयों का बटन प्रसामान्य है। उसके माध्य और प्रसरण को हम विनिर्दिय्ट नहीं करते।

इस परिकलना का परीक्षण x-बटन की सहायता से किस प्रकार किया जाता है, यह नीचे के उदाहरण में दिवा हुआ है।

निराकरणीय परिकल्पमा H,: राजस्थान के एक विशेष भाग के निवासियों की उँचाइयों का बटन प्रसामान्य है।

पूर्व इसके कि हम x_{-}^{2} परोक्षण का प्रयोग करें, हमें यह मालूम करना है कि कीन सा प्रसामान्य बटन प्रतिदर्श बटन से अधिकतम साद्दय रखता है। इसके लिए सर्व-प्रथम हमें प्रतिदर्श-बटन से μ और σ का प्राक्कलन करना है। फिर हम इन प्राक्कलित μ और σ बाले प्रसामान्य बटन के लिए χ_{-}^{2} परोदाय करेंगे।

इसमें χ^2 की स्वातत्र्य-सच्या कुल कुलको से एक नहीं बल्कि दो कम होती है। स्वातत्र्य-सच्या के मालूम करने का साधारण नियम यह है कि कुल कुलको की सच्या में से उन प्राचलों की सख्या को घटा दिया जाय जिनका प्रावकलन प्रतिदशैं पर ही आधारित हो।

आंकड़े—प्रतिदर्श में माध्य 5 फुट 7 इच और मानक-विचलन 2.3 इंच है। पिछले उदाहरण की भाँति ऊँचाइयो के परास की चार आयो में विमाजित किया हुआ है।

- (1) h < 5 पुट 4.7 इव
- (2) 5 फुट 4.7 इन ≤ h < 5 फुट 7 इन
- (3) ऽ फुट ७ इच ≤ h < ऽ फुट 9.3 इच</p>
- (4) h ≥ 5 দুত 9.3 হৰ

इन चार भागो में प्रेक्षित और प्रत्याशित बारबारताएँ नीचे की सारणी में दी हुई है।

सारणी संख्या १३

केंचाई कुलक	1	2	3	4
प्रेक्षित बारबारता	41	63	69	27
प्रत्याधित बारबारता	31.73	68.27	68.27	31.73

अस्वीकृति क्षेत्र—यदि प्रेक्षित x^2 का मान x_2^2 के पाँच प्रतिशत दिंदु 5.991 से

अधिक होगा तो निराकरणोय परिकल्पना को अस्वीकार कर दिया जायगा। (देखिए मारणी सस्या 98)

विश्लेष्ठवण् —
$$\chi^2 = \frac{(41\ 00-31\ 73)^2}{31\ 73} + \frac{(63\ 00-68\ 27)^2}{68\ 27} + \frac{(69\ 00-68\ 27)^2}{31\ 73} + \frac{(27\ 00-31\ 73)^2}{31\ 73} = \frac{85\ 93+22\ 37}{31\ 73} + \frac{27\ 77+0\ 53}{68\ 27}$$
< 5 001

इसलिए इस परीक्षण के आधार पर परिकल्पना को अस्वीकार करने का कोई कारण नहीं है।

६९.१० गुण-साहचर्य (Association of attributes) के लिए दो स्वतंत्र

प्रतिदर्शी x परीक्षण

अब हुम एक बहुत ही मनोरजक प्रहेलिका या हल बूंबेंगे। कुछ गुण ऐसे होतें हैं जिनमें परस्पर साहबर्ष (association) होता है। इसका अर्थ यह है कियाँद किसी इकाई में इनमें से एक गुण विवसान हो तो उसमें दूसरे गुण के होने की समावना उस सम्य इकाई को अभेक्षा अभिक होती है जिसमें यह पहिला गुण विवसान न हो।

गुण-साहचर्य का एक महत्त्वपूण उदाहरण टीके (moculation) के प्रभाव

पर विचार करने से भिलता है।

सब मनुष्यों को दो भागों में विनाजित किया जा सकता है—(१) वे जिनके टीका लग चुका हो, (२) वे जिनके टीका न लगा हो ।

इन सब मनुष्यों को एक दूसरी रीति से भी दो कुलको में बाँटा का सकता है। (१) वे जिन्हें एक निश्चित सभय के अन्यर बीमारी हुई हो, (२) वे जिन्हें उसी समय में बीमारी न हुई हो।

डाक्टरों का कहना यह है कि टीका लगाने से बीमारी से बचाव होता है। उनकें इस करन की जाँच करने के लिए खालिक दो यादुन्लिक प्रतिदर्ध ले सकता है— एक उन मन्द्रीयों में से जिनकें टीका लग चुना हो और दूसरा उन मनुष्यों में से जिनकें टीका न लगा हो। यदि टीके का कुछ भी प्रभाव बीमारी को रोकने पर नहीं परता तो इन दोनो प्रतिदक्षों में बीमारी का प्रत्याखित अनुपाद समान होगा। यदि प्रतिदक्षों में इत अनुवात में कुछ अतर हो तो बहु इतना कम होना चाहिए कि उतने या उत्तसे अधिक अतर के केवल समोग से पाये जाने की प्रायिकता बहुत कम न हो। इसके निपरीत यदि इत अनुवातों में जतर बहुत अधिक हो अर्थात् गरिटीका कमें हुए मनुष्यों में बीमारों नत अनुपात उत्त अनुवात से बहुत कम हो जो बिना टीका लगे हुए लोगों में है—इतना कम कि मह समझता किल हो जाय कि यह अतर केवल सयोगवा हो गया है—तो इस कह सकते हैं कि इत प्रेसणो हारा आकरों के कथन को पुरिट हो गयी है।

भीने इसी प्रकार का एक जवाहरण दिया हुआ है जिससे यह स्पष्ट हो जायगा कि बड़े प्रतिदर्शों में प्रायिकता का कलन किस प्रकार किया जा सकता है।

जवाहरण (१) एक रोग मेडों में होता है जिसके कारण अधिकतर रोगी भेडों की मृत्युहों जाती है। एक नवीन औपथ का आफिशर हुआ है जिसके किए यह दावा किया लाता है कि वह मेडों के इन रोग को ठीक कर देती है। परतु हम यह जातते हैं कि इम वियोग रोग के जितिएत्त जेडों की मृत्यु के जन्य भी जनेक कारण हो सकते हैं। इसके अर्जिएक हुछ मेडें जिमा निसी इकान के भी ठीक हो सकती है। यह सब जानते हुए हमें इस जीनभ के बारे में जो दाया किया जाता है उसकी जॉब करनी है।

प्रमीम —पचार रोगी मेडी की —जो इस चिरोय रोग से पीडित थी —यादृष्टिकी-करण द्वारा पच्चीत पच्चीत के यो कुल्कों में बांट दिया गया। हम इन कुलकों को A कीर B से समीमित वरंगे। कुलक A की मेडी का इट औपच द्वारा इलाज किया गया और कुलक B की मेडी का कोई इलाज नहीं किया गया।

जब इन पत्तास मेडो में से प्रत्येक या तो ठीक हो गयी या मर गयी तो प्रयोग का फल निस्तिशिवत शा—

सारणी सख्या 94 प्रेक्षित बारबारताए Ou

	<u>कुल</u> ः	F.A.	कुलक B (2)	ब्र ल
नीरोगो की सख्या	(x)	21	II	32
मृत्यु-सस्या	(2)	4	14	18
कुर	{	25	25	50

निराकरणीय परिकल्पना $H_{\rm g}$ औषघ के नारण रोगी भेड के नीरोग होने की प्रायिक्ता में कुछ अतर नही पडता।

इस परिकल्पना के नाधार पर नि जीपय से कुछ ठाम नहीं होता, भेड के नीरोग होने की प्रायकता का प्रावक्तन स्पष्टतया $\frac{9}{100}$ है। इस प्रायक्ता के अनुसार उनर की सारणी के विभिन्न झानो में प्रत्याचित सक्याए निम्नलिखित होगी—

सारणी संख्या 95 विभिन्न खानो में प्रत्याद्यत सस्याएँ Ea

		कुलक A (I)	कुलक B	कुल
नीरोगो की सस्या	(1)	16	16	32
मृत्यु-सस्या	(2)	9	9	18
জুল		25	25	50

कस्बीकृति खेब— यह आपने वेला ही होगा कि इस सारणी में एक पार्सीय बार-बारताओं के योग 25, 25, 32 और 18 तिहिलत है। इस कारण यदि मध्य के बार सारों में से किसी एक में सस्या दे रखी हो तो अन्य तीन खानो की सस्याओं कापरिकल्ल किया जा सकता है। प्रत्येक साने के लिए अलग-अलग प्रत्यातित सस्या का चलन आवश्यक नहीं हैं। (1,1) खाने में 16 लिखते हीं (1,2) खाने में 32—16—26, (2,1) खाने में 25—10—9 और (2,2) खाने में 18—9=9 लिखा जा सकता है। इस प्रकार प्रयोग के फल में केक्श एक खाने में सस्या निश्चित करने की स्वगतात है। अन्य खानों ने सस्या ने परिकलन इसी आधार पर निया जा सबता है। इस स्थित में यह दिलाया जा सकता है। इस

$$\chi_{-}^{2} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^{2}}{E_{i}}$$

का बटन लगभग $\chi_1^{\hat{z}}$ है। महाँ O_{ij} से तात्पर्य (i,j) खाने में प्रेक्षित सख्या से सम्बा E_{ij} से इसी खाने में प्रत्याशित सख्या से है।

इस प्रकार यदि गरिकलित χ^2 का मान χ^2 , के गाँच प्रतिशत बिंदु 3.841 से यिपक होगा तो हम इस परिकरपना H_s को अस्वीकार कर हेंगे। (बेलिए सारणी सस्वा 9.8)

विश्लेषण —
$$\chi^2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

$$= \frac{5^2!}{16} + \frac{5^2}{16} + \frac{5^2}{9} + \frac{5^4}{9}$$

$$= 50 \left[\frac{7}{18} + \frac{1}{9} \right]$$

$$= \frac{50 \times 25}{16 \times 9}$$

$$= 8 68$$

निष्कर्ण-स्थानि x मा प्रेसित मान 3 841 से अधिक है इंसलिए हम Ho को अल्लीकार करते हैं। इस प्रकार हम देलते हैं कि यह प्रयोग औपम के बारे में किये हए सारे की पुष्टि करता है।

पदाहरण (२) k×ा धर्गीकरण

समस्य को दो आगो में बॉटने के बजाय उसे अनेक आगो में बॉटा जा सकता है। प्रदाहरण के लिए (A) के व्यक्ति जो न प्रत शकते हैं और न दिव्य सकते हैं, (B) के व्यक्ति हो पर तो सकते हैं, (B) के व्यक्ति हो पर तो सकते हैं, पर लिख नहीं सकते, (C) वे व्यक्ति को परना और लिखना दोनों ही जानते हैं। यह आरत की जनता को तीन आगो में बॉटने का एक रामिक हो सकता है।

भारत की जनता को एक और प्रकार से पाँच भागो में विभाजित किया जा सकता है।

- (a) वे व्यक्ति जो काग्रेस पार्टी के अनुयायी है।
- (β) वे व्यक्ति को कम्यूनिस्ट पार्टी के अनुयायी हैं।

() वे व्यक्ति जो प्रजा सोशिलस्ट पार्टी के बनुवायी है।

(े) वे व्यक्ति जो इन नीन पार्टियों के अतिरिक्त किसी अन्य पार्टी के अनुयायी हैं।

(द) वे व्यक्ति जो राजनीति में बिलकुल दिलक्स्मी नही लेते या जिन्हें कुछ दिलक्स्मी है भी तो वे किसी मौजूदा पार्टी के अनुवायी नही है ।

इन दो प्रकार के विभाजनों के सयोग से कुछ 3×5 लानों में जनता के किसी भी मनुष्य की रखा जा सकता है। यदि याइच्छिकीकरण हारा चुने हुए व्यक्ति के इनमें से किसी एक में होने की प्राधिकताओं का गुणनफ़क किसी एक में होने की प्राधिकताओं का गुणनफ़क ही जिनके स्थीन से यह बना है, तो इस प्रकार के विभाजनों के एक दूसरे से स्वतन समझा जाता है। उदाहरण के छिए यदि ऊपर के विभाजन स्वतन हो तो इस पटना की प्राधिकता कि याइच्छिकीकरण हारा चुना हुआ एक व्यक्ति लिखना पडना नहीं जानता और उसे राजनीति में कुछ दिक्कस्पी नहीं है निम्मिलिकत हो पटनाओं की प्राधिकता और उसे राजनीति में कुछ दिक्कस्पी नहीं है किम्मिलिकत हो पटनाओं की प्राधिकताओं का गुणनफ़क है। एक तो यह कि इस व्यक्ति को पडना जिलना नहीं आतों और दूसरी यह कि हक्को राजनीति में विकारण्यों नहीं है।

हन पूर्ण की स्वतनता की परिकरवना के परीमण के लिए भी χ^2 -वटम का प्रयोग होता है। यदि एक प्रकार के कुछ गूणों को खब्दा L हो और दूसरी प्रकार के कुछ गूणों को सब्दा L हो और दूसरी प्रकार के कुछ गूणों को सबसा हो तो हमें एक L रूप लाना को सारणी मिन्छती है। उत्तर के उवाहरण में हमें एक 3×5 सारणी प्राप्त होती है जिसे नीचे दिया हुआ है। विभिन्न लानों में व्यवित के पाये जाने की प्रायिकता या प्रतिवर्ध में विभिन्न लानों में प्रत्याचित सब्दा की मालूम करने के लिए यह आवश्यक है कि हमें एक-प्राव्योग प्रायिकताओं का झान हो। इस प्राप्त का जा प्राप्त करने पिछले जहार की भीति एक पार्वीय सब्दाओं के जोड़ों में कुछ प्रतिदर्श परियाण का भाग ठेकर किया जाता है।

हुन प्रयोग के केवल जन फलो पर विचार कर रहे हैं जिनमें में एक-पारमीं जोड़ जबर रहते हैं जैना इस निवोप प्रयोग में है। इस कारण विची परित के (k-1) बातों में बस्थाओं का बातही के हम बाकी एक बात की तस्या मालूम नर सकते हैं। इसी प्रकार मिंदि किसी स्तम की (r-1) स्थाएं हुम बात हो जो बाती एक का परिकार किया का सकता है। इस मकार यदि हमें (k-1) (r-1) मस्याने का जाति हों की सारणों को पूरा किया जा सकता है। साधारण नियम द्वारा प्राप्त प्रवास की ती सारणों को पूरा किया जा सकता है। साधारण नियम द्वारा प्राप्त प्रवास की सार्वास की की सारणों को सुरा किया जा सकता है। साधारण नियम द्वारा होता है।

सारणी संख्या 96

ह्यवित के पढ़ाई के स्तर और राजनीतिक शुकाव की स्वतत्रता की जॉन के लिए प्रेक्षित बारवारताए Ou

1 J	α	β	γ	δ	9	कुल
A	32	26	15	7	24	104
В	91	12	15	9	77	204
С	47	18	11	14	102	192
कुल	170	56	41	30	203	500

$$P(A) = \frac{104}{500} \qquad P(B) = \frac{204}{500} \qquad P(C) = \frac{192}{500}$$

$$P(\alpha) = \frac{170}{500} \qquad P(\beta) = \frac{56}{500} \qquad P(\gamma) = \frac{41}{500}$$

$$P(\delta) = \frac{30}{500} \qquad P(G) = \frac{203}{500}$$

सारणी संख्या 97

गुणों की स्वतंत्रता के आधार पर ऊपर के प्रयोग में प्रत्याधित बारवारताएँ

 $E_{ij} = NP(i)P(j)$

1	α	β	γ	8	6	कुल
A	35-360	11.648	8.528	6.240	42.224	104 000
В	69.360	22.848	16.728	12.240	82.824	204.00
С	65.280	21.504	15 744	11.520	77-952	192.000
कुल	170.000	56.000	41.000	30.000	203.000	500,000

अस्थीकृति क्षेत्र—यदि $\chi^{\frac{2}{3}}$ नापरिकल्प्ति यान $\chi^{\frac{2}{3}}$ के पाँच प्रतिगत बिंदु 15 507 से अधिक होगा तो हम निराकरणीय परिकल्पना को अस्थीकार कर देंगे । (देखिए सारणी सस्या 9 8)

विदलेयण ---

$$x^{2} = \sum_{j=1}^{9} \sum_{j=1}^{9} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^{2}}{E_{ij}}$$

$$= \frac{(-3 \ 360)^{2}}{35 \ 360} + \frac{(21 \ 640)^{2}}{69 \ 360} + \frac{(-18 \ 280)^{8}}{65 \ 280}$$

$$+ \frac{(14 \ 352)^{3}}{11 \ 648} + \frac{(-10 \ 848)^{9}}{22 \ 848} + \frac{(-3 \ 504)^{9}}{21 \ 540}$$

$$+ \frac{(6 \ 472)^{8}}{(8 \ 538)} + \frac{(-17 \ 28)^{8}}{15 \ 744} + \frac{(-4744)^{9}}{15 \ 744}$$

$$+ \frac{(0 \ 760)^{2}}{6240} + \frac{(-3 \ 240)^{2}}{12 \ 240} + \frac{(24 \ 820)^{3}}{11 \ 520}$$

$$+ \frac{(-18 \ 224)^{2}}{42 \ 224} + \frac{(-5 \ 824)^{2}}{82 \ 824} + \frac{(24 \ 048)^{3}}{77 \ 952}$$
> 15 507

निष्कर्ष-हम निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकार करते है-

इस प्रकार के परीक्षण की समागता-परीक्षण (test of homogeneity) भी कहते हैं 1 इसमें परिकल्पना यह होती हैं कि यदि समिद्र की एक पुण के अनुसार विभागित किया जाब ती इन उप-समिद्रियों का घटन दूसरे गुण के अनुसार एक समान है । उदाहरण के किए उपर निर्मे हुए प्रभोग में पदाई और राजनीतिक सुकाव में स्वाहम्थ के अर्थ यह है कि यदि कुछ जन-सच्या को राजनीतिक सुकाव के अनुसार विभागित किया जाय दो इस प्रकार के प्रयोक समूह में विमा पढ़े-कियों, सेवल पड़ना जाननेवालों और पड़ता तथा जिल्ला होती जाननेवालों का अनुपात बराबर होगा । इसकी सकेत में निम्निलिश्त क्य थे विका जा सकता है—

$$P(A|\alpha) = P(A|\beta) = P(A|\gamma) = P(A|\alpha) = P(A|\epsilon)$$

 $P(B|\alpha) = P(B|\beta) = P(B|\gamma) = P(B|\delta) = P(B|\epsilon)$
 $P(C|\alpha) = P(C|\beta) = P(C|\gamma) = P(C|\delta) = P(C|\epsilon)$

यदि में अनुपात बरावर है तो हम कह सकते हैं कि विभिन्न दृष्टिकोणवाले मनुष्यों के सन्हों को मिला देने पर भी समष्टि पढाई की दृष्टि से ज्यों की त्यों बनी रहती है— अधिक असमाग (heterogenous) नहीं हो जाती।

§ ९११ प्रसामान्य-वटन के प्रसरण सबधी परिकल्पना-परीक्षण मे

x²

—वटन का उपयोग

अभी तक χ^2 —बटन के जितने उपयोगा से हम परिचित हुए हैं उन मवर्में यह आवश्यक था कि प्रतिदर्श परिमाण यथेष्ट रूप से बड़ा हो। यदि हमें मह शात हो कि समिद्ध प्रसामान्य है तथा इस बात का परिक्षण करने की आवश्यकता नहीं है और हम केश्रल यह जानना चाहों कि इस समिद्ध का प्रसरण वै है अथवा नहीं तो भी हम χ^2 —बटन का प्रयोग करते हैं। साथाप्प रीति से बाध्य का अनुमान लगाकर कपर दियं हुए χ^2 —परोक्षण हारा जेने जीचा जा सकता है। परतु जिस नशीन परीक्षण मा वर्णन कर रहे हैं वह इस विवोध निराकरणीय परिकल्पना के लिए प्रभिक्त सास्तिसाली है और उसके लिए प्रभिवश्वों के बड़े होने की आवश्यकता नहीं है।

मान लीजिए कि एक प्रसामान्य बटन का प्रसरण σ^2 है। यदि इस वटन का एक n परिमाण का प्रतिदर्श यादिष्ण्यकीकरण द्वारा लिया जाय जिसके मान x_1, x_2, \dots, x_n हो तो यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$n\frac{s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n (r_i - \overline{x})^2$$

का बटन \mathbb{R}^2_{n-1} है। यहाँ \hat{x} से हम प्रतिदर्श माध्य $\frac{x}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ को सूचित करते हैं।

और 3⁴ उस प्रतिवर्श का प्रसरण है। इस प्रतिवर्शन (statistic) n $\frac{s^2}{v^2}$ का बटन समिट के माध्य μ (म्यू) से सर्वया स्वतन है। इस कारण μ के अज्ञात होने पर भी समिट की प्रसरण ध्रवधी परिकल्पना का परीक्षण इसकी सहायता से किया जा सकता है।

उदाहरण—एक फैक्टरी में पीतल की छड़ें बनती हैं। पिछले पर्यो के अनुभव और प्रेक्षण द्वारा हम यह जानते हैं कि इन छड़ों की छबाइयों का बटन प्रसामान्य है। एक प्राहक को छड़ों की बालस्यकता है और वह एक हजार छड़े खरीदने के लिए तैयार है यदि इनकी लवाई लगभग बरावर हो । उसका कहना है कि यदि इन हजार छड़ों की लवाइयों का मानक विचलन 0.2 इन से अधिक न हो तो वह इन्हें खरीदने की तैयार है। जब फैनरोवाले उसे बताते हैं कि एक हज़ार छड़ों के नामने और उसाज एक फोनक विचलन के क्लन में बहुत समय तथा प्रज्यय होगा जिसके काण्य छड़ों की फीनत बड़ाने की आवश्यकता हों जायगी तो माहक इन बात पर राजी ही जाता है कि इस खड़ों का एक बाइक्डिक में प्रकार के कि जाय की उसाक है। जाय की उसाक है होगा हो बहुत हो में से बुना जाय और उसके द्वारा इस निराहरणीय परिकरना की जाँच की जाय कि कुछ समिद का मानक विचलन 0.2 इन है। यदि प्रतिदश्च में मानक विचलन का अनुमान 0.2 इन से कम आता है तब तो उसे कुछ एतराज होगा ही नहीं । परन्तु यदि प्रतिदश्च मानक विचलन 0.2 इन से हदना अधिक हुआ कि हमें निराहरणीय परिकरना नो तो प्रतिकार में से वह से हदना अधिक हुआ कि हमें निराहरणीय परिकरना नो तो प्रतिकार कर पर अस्थितर को नहीं लेगा।

 H_o हवार छडो को समस्टि का मानक विचलन 0.2 इच है। अस्वीहित क्षेत्र—यदि इस छडो के यादृष्टिक प्रतिदर्श से परिकल्पित $\frac{s^2}{\sigma^2}$ का मान $x_{2D-1}^2 = \frac{s}{\sigma^2}$ के थे। प्रतियत बिंदु 19 679 से अधिक हो तो ब्राह्क छड़ी को लेने से इनकार कर देया।

प्रेक्षण--यादृष्टिक प्रतिदश में छड़ों की लबाइयाँ निम्नलिखित थी--

(1) 60 4 ET (2) 60 3 ET (3) 60 8 ET (4) 60 6 ET (5) 60 9 ET

विश्लेषण —
$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 605.2$$
 इस $= 1$

$$x = 60.52$$
 इस $n \frac{s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{10} (x_i - \overline{x})^2$

$$= \frac{1}{0.04} [(-0.12)^2 + (-0.22)^2 + (0.28)^2 + (0.08)^2 + (0.08)^2$$

$$+ (-0.22)^{2} + (-0.42)^{2} + (-0.02)^{3}$$

$$+ (0.18)^{2}]$$

$$= \frac{1}{0.04} [0.5560]$$

$$= 13.9$$

निष्कर्ष — स्योकि $n\frac{S^2}{\sigma^4}$ का प्रेकित मान 19 679 से कम है इसलिए ग्राहरू को छड़ों के समृह को खरीदने में कोई एतराज नहीं होना चाहिए।

इस जदाहरण के साय हम x^2 बटन के जरायोगों का यणव समान्त करते हैं। इसका यह अये कवागि नहीं है कि इस बटन के अन्य जरायोग नहीं हैं। वास्तव में यहुषर (mulnvanate) बटनों में बिग्रेयकर बहुषर $xunneq ach स स्विधित अनेक निराकरणीय परिकलनाओं के परीक्षण में इसका जपयोग होता है। परन्तु आप अभी तक बहुषर बटनों से परिचल नहीं है। इसकिए <math>x^2$ के इस उपयोग का यणन इस स्थान पर करना जिया नहीं होगा।

सारणी सख्या 98 कुछ × वटनो के ५ और 1 प्रतिग्रत विष

स्वातव्य संस्या	5% बिंदु	1% बिदु
1	3 841	6 635
2	5 991	7 824
3	7815	11 341
4	9 488	13 277
S	11 070	15 806
6	12 592	16812
8	15 507	20 090

विस्तृत सारणी के लिए देखिए--

"Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research" By Fisher and Yates

t-वंटन

५ १० १ उपयोग

पिछले अध्याय के अतिम जवाहरण में हमें यह भाकूम था कि समिष्ट प्रसामान्य
है। इसके माध्य में हमें कुछ क्षि नहीं थी और न उसका ज्ञान था। हम इस
समिष्ट के प्रसरण से सबिधत निराकरणीय परिकल्पना की जांच करना चाहते
थे। इसके विपरीत यह हो सकता है कि हमें यह पता हो कि समिष्ट प्रसामान्य है,
उसके प्रसरण का हमें जान न हो और हम उसके माध्य सबधी किसी परिकल्पना की
जांच करना चाहें। इस परीक्षण के लिए जिस चटन का उपयोग किया जाता है उसे
1-वटन कहते हैं।

९ै १०२ t—वटन का प्रसामान्य वटन और x⁼वटन से सवध

आइए, देसा जाय कि इस वटन का प्रसामान्य वटन से और x^2 -वटन से क्या सवम है।

यदि X एक थादुष्टिक प्रसामान्य N(o,1) वर हो Y एक x_n^4 चर हो समX और Y स्वतन हो तो X और Y का स्युनत बटन $f_k(x,y)$ निम्नलिखित होगा ।

$$f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\frac{2^n}{3!}\binom{n}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2}$$

$$\text{ alg } Z = \sqrt{y/n} \text{ \vec{e} it it x all x an \vec{e} \vec{q} ach $ach y}$$

$$f_2(x,z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} z^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{x^2 + nz^2}{2}}$$
 (101)

बयोकि हमें X और Z का संयुक्त बटन ज्ञात है इस्रलिए हम X और Z के किसी फलत का बटन भी मालूम कर सकते हैं । यह सिद्ध किया जा सकता है कि यदि

$$U = \frac{X}{Z}$$
 हो तो

$$P[U \leqslant x] = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} \frac{du}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

इसरो रावधित U का चमत्व-फलन स्पष्टतया निम्मलिखित है--

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \dots (10.2)$$

यह पतस्य-फुल्न अथवा उपका उपर दिया हुआ सचयी बारवारता फुल्न जिस बटन को निक्षित करता है वह n स्वात-श्य-प्रस्थावाला ξ -त्रटन कहलाता है । दुसकी सभै प \hat{t} /t-वटन कहते हैं ।

§ १०'३ परिकल्पना परीक्षण

यदि एक प्रभागान्य बटन $N(\mu, \sigma)$ में ने n परिमाण का एक याद्गिक्वक प्रतिदर्श चुना जाय जिसमें चर के प्रेशित मान κ_L, κ_σ , κ_σ , हो तो यह हम पहिले ही बेल पुके है कि $\frac{\kappa_\sigma - \mu}{\sigma \sqrt{n}}$ एक प्रसामान्य N(o, t) चर होता है, जहाँ

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

यह भी आपको पता ही है कि $\frac{11}{\sigma^2}$ एक χ^2_{n-1} चर है जहाँ

$$s^2 = \sum_{\substack{1=1 \ 0}}^n (x_1 - \overline{x})^2$$
। यह सिद्ध किया जासकता है कि $\overline{x} - \mu$ तथा

$$\frac{m^2}{\sigma^2}$$
 एक दूसरे से स्वतन चर हैं। इसलिए $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{n s^2}{\sigma^2}}$ एक t_{n_1} चर

है। इसमें σ/\sqrt{n} कट जाता है और हम देखते हैं कि $\frac{x-\mu}{s}\sqrt{n-1}$ एक

 $t_{n-1} = \neg x$ है। क्योंकि यह माना $\frac{x}{n-1}$ $\frac{x}{n-1}$ आधारभूव प्रसामान्य यटन के प्रसरण σ^2 से स्वतन हैं, इसिल्स σ^2 के जज्ञात होने पर हम t_{n-1} — बदन का उपयोग समिद्ध के माध्य μ से गवधित निराकरणीय परिकल्पना के परीक्षण के लिए कर सकते हैं । विनिज्ञ स्वातक्य-संस्थावाले t—वटनों की सारिवार्यों सांस्थिकों ने बना रजी है क्योंकि इस वटन का प्रयोग परिकल्पना परीक्षण में बहुत क्षिमक प्रवित्त है। वैदी-तेश्व t—पदन की स्वातक्य-संस्था बढ़ती जाती है वह प्रसामान्य N(0,1) बटन की और अग्रवर होता जाता है। स्वातक्य-संस्था 30 हो जाने पर ये दीनों बदन इतने अधिक समान हो जाते हैं कि इससे अधिक किसी भी स्वावक्य-संस्था के होने पर t—वटन के स्वान पर N(0,1) बटन के प्रयोग से कोई विद्येष वृद्धि की सभावना नहीं रजती

सारणी सख्या 10-1

कुछ !-बटनो के 5.0, 2.5, 1.0 तथा 0.5 प्रतिशत बिंदु

स्वातत्रथ-सस्या	12 15	18	2I	24
5.0% विद <u>ु</u>	1 782 1 75			
	2.179 2 13			
1.0% बिंदु	2 681,2 60	2 2 5 5 2	2518	2 492
० ५% बिंदु	3 055 2 94	72.878	2,831	2.797

विस्तृत सारणी के लिए देखिए---

"Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research" by Fisher and Yates

§ १० ४ उदाहरण

(१) यह कहा जाता है कि अमेरिका-निवासियों की औसत ऊचाई छ फूट है। इस परिकल्पना की जीव के लिए पच्चीस अमेरिका-निवासियों का एक याद्विकन प्रतिदर्श लिया गया और उनकी ऊँचाइयों को नाषा गया। इस प्रयोग का फल निम्न-क्रितिन या----

निराकरणीय परिकल्पना Ho:

निराकरणीय परिकल्पना Ho:
अमेरिका-बासियों की औसत ऊचाई छ फुट है।
अस्वीकृति क्षेत्र

KOTTERNI

यदि प्रतिदर्श में ऊँचाइयों का माध्य 6 फुट से इतना कम हो कि निराक्तरणीय परिकल्पना के आधार पर मेखित अथवा उससे भी कम माध्य होने की प्राधिकता ० 5 प्रतिवात से भी कम हो अथवा परि यह माध्य 6 फुट से इतमा अधिक हो कि निराक्तरणीय परिकल्पना के आधार पर प्रेसित अयवा उससे भी अधिक माध्य की प्राधिकता ० 5 प्रतिवात या उससे भी कम हो तो निराक्तरणीय परिकल्पना को अस्मीचार कर दिया जायगा। इस प्रकार निराक्तरणीय परिकल्पना के स्वयं होने पर भी उसकी अध्योक्तर करने के स्वरं होने पर भी उसकी अध्योक्तर करने की कुछ प्राधिकता एक प्रतिवात है।

इस तरह थाँद
$$\left| \begin{array}{c} x - 6 \ \text{पुट} \\ \hline s \sqrt{n-1} \end{array} \right|$$
 का मान t_{xx} के 0 5 प्रतिपत बिंदु 2 797 से

अधिक हो तो हम Ho को अस्वीकार करेंगे। (देखिए सारणी सख्या 101)

विद्वेदण-

$$\begin{vmatrix} \overline{x} - 6 & \overline{y} \overline{z} \\ 5 | \sqrt{n-1} \end{vmatrix} = \underbrace{\frac{20}{05}} \sqrt{\frac{24}{24}}$$

निच्कर्य-

$$\frac{\overline{x}-6}{s/\sqrt{n-1}}$$
 का प्रेक्षित मान 2 797 से बहुत अधिक

है, इमलिए हमें H_o को अस्वीकार करना होगा।

इन परिकल्पना की जाँच में हम इस अभियारणा को लेकर चले है कि अमेरिका वासियों की कॅबाइयों का बेटन प्रसामान्य है। यदि यह अभियारणा गण्ठ हो तो कंगरिलेखित परीकण का चैंडातिक आधार हो जाता रहेगा। हम यह देख चुके है कि ममिट के प्रसामान्य न होने पर भी यदि प्रतिदर्श काफी वडा होतो है, का बटन लगभग प्रसामान्य होता है। इसी प्रकार देखा गया है कि यदि प्रतिदर्श बडा न हो तो

 $[\]frac{x-\mu}{s|\sqrt{n-1}}$ का घटन रूपभाग t_{n-1} होता है। इस कारण समस्टि के प्रसामान्य न होने पर भी t_{n-1} बटन के प्रयोग से जींच में निर्यय त्रिट नहीं होती।

§ १० ५ एक तरफा और दो तरफा परीक्षण

ऊपर के उदाहरण में
$$\frac{x_{\mu}}{\sqrt[3]{\sqrt{n_{\mu}}}}$$
 का मान 2.797 से बड़ा हो या—2.797 से

छोटा हो, इन दोनो ही अवस्याओं में हमने H_{ϕ} को अस्वीकार करने का निश्चय किया या। इस प्रकार के परीक्षण को डोन्तरफा परीक्षण (two-sided test) कहते हैं। इसके विपरीत कुछ अवस्थाएँ ऐसी हो। सकती है जिनमें हम निराक्तरणीय परिक्रस्था

छोटा होने पर अस्वीकार नहीं करते। इसी प्रकार कुछ अन्य अवस्थाएँ ऐसी भी हो सकती है जिनमें निराकरणीय परिकल्पना केवल उसी समय अस्वीकार की जाती है

जब
$$\dfrac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n-1}}$$
 का मान बहुत छोटा हो—बहुत बडा होने पर नहीं । इस प्रकार के

परीक्षण को एक-तरफा परीक्षण (one-sided test) कहते है। आइए, अब हम एक उदाहरण द्वारा एक-तरफा परीक्षण से परिचय प्राप्त करें।

(२) एक सरीर-रचना विद्योपश (anatomut) ने गहन अध्यमन के परचात् यह सिद्धान्त निकाला कि साधारणतया मनुष्य का दाहिना हाथ बाये हाथ से अधिक लग होता है।

निराकरणीय परिकल्पना H_a

अथवा

वाहिने और नीयें हाथों की जीसत ल्वाइयों बराबर है। यदि वाहिने हाथ की लवाइयों की समीव्य का साध्य μ_1 ही और वार्यें हाथ की लवाइयों की समीव्य का साध्य μ_2 ही ती

$$\mu_1 = \mu_2$$
 $u_1 = \mu_2 = 0$ (10.3)

इसलिए निराकरणीय परिकल्पना को दूसरे घट्दों में भी रखा जा सकता है—''दाहिने ज़ौर बार्में हायों को खंबाइयों के अंतर की समिष्टि का माध्य चून्य हैं।''

बैकल्पिक परिकल्पना H_1 :

दाहिने और वार्ये हायो की लवाइयो के अंतर की समस्टि का माध्य र्ष्ट्य से अधिक है।

$$\mu_1 - \mu_1 > 0$$

यही वह सिद्धात है जो शरीर रचना विशेषज्ञ ने निकाला है।

प्रयोग---परिकल्पना को जांच के लिए 16 मनुष्यों का एक याद्विष्ठक प्रतिदर्श लिया गया। इस प्रतिदर्श में चुने हुए व्यक्तियों के वाहिने और वाये हाथों की लवाइयाँ भागों गयी।

सिंद शहिने हाम की लगाइयों के प्रतिवर्ध-साध्य वो स्ति तथा बामें हाम की लगाइयों के प्रतिवर्ध माध्य को स्त्रु से मूचित किया जाय, प्रतिवर्ध के १-वें मनुष्य के वाहिने और बामें हाम की कबाइयों को जनवा अश्वतव्य अन्ने से सूचित किया जाम तो इस प्रयोग के फलो को निन्नीलिसित रूप में रखा वा सकता है।

अम्बीकृति क्षेत्र

यदि
$$\frac{x_1 - x_2}{s\sqrt{15}} = \frac{(x_1 - x_2)\sqrt{15}}{s}$$
 का मान t_{15} के पांच प्रतिशत विंदु

1.753 से अधिक होगा तो निराकरणीय परिकल्पना $H_{
m e}$ को अस्वीकार करके हम परिकल्पना $H_{
m l}$ को स्वीकार करेंगे। (देखिए सारणी मस्या 10.1)

$$\frac{1}{64 \cos 4 \pi} \left(\frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s} \right) \frac{\sqrt{15}}{s} = \frac{0.50 \times 3}{0.7141} \frac{87}{7141}$$
> 1.753

<u> निकार्य</u>

दोनो हायो को स्ववाइयाँ वरावर होने की परिकल्पना को अस्वीकार करके हम कह सकते है कि प्रयोग का फल घरीर-रचना विशेषज्ञ के सिद्धात के अनुकुछ है।

इस उदाहरण में हमने एक-नरफा परीक्षण का उपयोग किया है। इसमें निप-करणीय परिकरणना के स्तय होने पर भी उचको अस्त्रीकार करने की आधिकता प्रीय प्रतिश्वत है। हम इसमें अक्षित मान को नुलना —िवटन के पाँच अविश्वत कि हुते करते हैं। दियदि हम दो-वरका परीक्षण का अयोग करते दो अक्षित मान की शुलना

t-बटन के 2 5 प्रतिशत बिंदु में की जाती। यदि $\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sqrt[4]{n-1}}$ का पनारमक मान

इस बिंदु से अधिक होता तो निराकरणीय परिकल्पना को अस्त्रीकार कर दिया आता। निराकरणीय परिकल्पना के सत्त्र होते हुए भी जसे अस्त्रीकार करने की प्राधि-कता तब भी पौज प्रतिशत हो होती। है—बटन की भाँति प्रसापान्य बटन के उपयोग में भी परिक्तित के अनुसार एक-उरफा अववा दो-तरफा परीक्षण होता है।

५१०६ द्वि-प्रतिदर्श परीक्षण (two sample test)

पिछले उदाहरण में आपने दो समस्टियो के भाष्यों के बराबर होने की परिकल्पना की जॉन की बी, परतु इसकी आवश्यकता नहीं थी कि दोनो समस्टियों में से प्रतिदर्शी का अलग-अलग चुनाव करें, क्योंकि एक ही मनुष्य से दोनो समस्टियों का माप लिजा जा सकता था। परतु ऐसी कई स्थितियाँ हो सकती है जिनमें दोनो समस्टियों में से अलग-अलग प्रतिदर्श चुनने की आवश्यकता हो।

यदि एक समस्ट में से n₄ परियाण का और दूसरी में से n₅ परिपाण का प्रतिदर्श यादन्छिकीकरण द्वारा स्वतंत्र रूप से चुना जाय, इन प्रतिदर्शों के साध्य कमस \vec{x} , तथा \vec{x} , हो और दोनो समस्टियो में प्रसरण बराबर हो तो

$$\begin{split} V\left(\overrightarrow{x}_1-\overrightarrow{x}_2\right) &= E\left[(\overrightarrow{x}_1-\overrightarrow{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)\right]^2\\ &= E\left[(\overrightarrow{x}_1-\mu_1-(\overrightarrow{x}_2-\mu_2)\right]^2\\ &= E\left[(\overrightarrow{x}_1-\mu_1)^2+(\overrightarrow{x}_2-\mu_2)^2-2(\overrightarrow{x}_2-\mu_1)(\overrightarrow{x}_2-\mu_2)\right]\\ &= E\left[(\overrightarrow{x}_1-\mu_1)^2+E(\overrightarrow{x}_2-\mu_2)^2-2E(\overrightarrow{x}_1-\mu_1)E(\overrightarrow{x}_2-\mu_2)\right]\\ &= \frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma_2}{n_2}-2\times 0\times 0\\ &= \sigma^2\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right] \end{split}$$

जहाँ σ^2 दोनो समध्ययो का प्रसरण है । प्रतिदर्श माध्यो के अतर के इस प्रसरण का निम्नक्तिवित प्राक्कलन है

$$\begin{split} \hat{V}(\vec{x}_{1} - \vec{x}_{2}) &= \frac{n_{2}z_{1}^{2} + n_{2}z_{3}^{2}}{n_{1} + n_{2} - 2} \times \left[\frac{1}{n_{1}} + \frac{1}{n_{2}}\right] \\ &= \frac{n_{1}}{n_{1}} n_{2} s_{1}^{2} = \sum_{i=1}^{n_{1}} (x_{1} - \vec{x}_{2})^{2} \\ &= n_{2} s_{3}^{2} = \sum_{i=1}^{n_{2}} (x_{2} - \vec{x}_{3})^{2} \end{split}$$

महाँ पहिले प्रतिदर्श की i—वी इकाई के मान को x_2 तथा दूसरे प्रतिदर्श के i— वीं इकाई के मान को x_2 से सुचित किया गया है।

एक प्रतिवर्श गरीसाथ में $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$ को उसके मानक विवरण के अनुसात $\frac{s}{\sqrt{n-1}}$ से विमाजित करने पर जो राजि प्राप्त होती थी वह एक I_{n-1} चर थी। उसी प्रकार क्षिप्रतिवर्श गरीसाथ में $(x_1-x_2)-(\mu_2-\mu_2)$ को उसके मानक विवरण में अगरक लंब द्वारा विमाजित करने से हमें जो चर प्राप्त होता है उसका यदन $I_{n_2+n_2-1}$ है। यर परिचरित्रम स्व स्तिवरमा के के बोने सामध्या में माध्य बराबर है तो $\mu_1-\mu_2=0$ । स्वित्य इस परिचरमा के अगरिय

$$\begin{split} t_{n_1+n_2-3} &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\left[\frac{n_1 s_1^{s_1} + n_2 s_2^{s_2}}{n_1 + n_2 - 2}\right] \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{n_1 s_2^{s_1} + n_2 s^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{n_1 s_2^{s_1} + n_2 s^2}} \sqrt{\frac{n_2 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \end{split}$$

आहए, अब एक उदाहरण की सहायता से हम इस परीक्षण से भली-भौति परिचित हो जायें।

११०७ उदाहरण

गमें की दो कित्में है---एक भारतीय और दूबरी जावा की। यह कहा जाता है कि भारतीय गमें की अधेक्षा जावा के गके में बीनी की मात्रा अधिक है। इस परि-करना की जींच के लिए दोनो प्रकार के गक्षों के दस दस गढ़ठर दूने गई और उनकी दबकर रस रिकाल कर उनमें चीनी का अनवात मालम किया गया।

निराकरणीय परिकल्पना H_a

इन दोनी प्रकार के गसी में औसतन चीनी का अनुपात बरावर है।

वैकल्पिक परिकल्पना H_1

औसतन जावा के यहां में चीनी की मात्रा अधिक है।

अस्वीकृति क्षेत्र

$$\overline{qfq} \quad t = \frac{x_1 - x_1}{\sqrt{10s_1^2 + 10s_1^2}} \sqrt{\frac{10 \times 10 \times (10 + 10 - 2)}{10 + 10}} \\
= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \times 3$$

का प्रेक्षित भान 🛵 के पाँच प्रतिश्रत बिंहु 1 734 से अधिक होगा तो वैकल्पिक परि-कल्पना की मुलना में निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकार किया जायगा (देखिए सारणी सच्या 10 1)

प्रेक्षण--- पक्षे के निभिन्न गट्ठरो से प्राप्त चीनी की माण (पीण्ड में) भीचे की सारणी में दी गयी है।

सारणी संख्या 10.2

भारतीय गन्ना		সাৰা	जावा का गन्ना		
गट्ठर सस्या	चीनी की मात्रा	गद्ठर सस्या	चीनी की मात्रा		
(1)	(2)	(3)	(4)		
I	15	ı	21		
	19	2	18		
3	21	3	16		
4	17	S	20		
5	19	5	23		
U	16	6	16		
7	15	7	19		
8	22	8	20		
9	17	9	23		
10	20	10	17		
कुल	181	যু ত	293		

विद्रतेयण

$$\frac{x_1}{x_2} = 18.1$$

$$\sum_{i=1}^{\sum x^2u} = 3331$$

$$\sum_{i=1}^{10} x^2_{2i} = 3785$$

निक्कर्य-स्थानि निकप (criterion) का प्रेक्षित मान 1 734 से बमा है। इसिक्ष्य इस प्रयोग के आधार पर निराकरणीय परिकल्पना को अस्त्रीकार करने का कोई कारण नहीं है।

इस उदाहरण में हमने एक तरफा परीक्षण का प्रयोग किया है। परतु जिस प्रकार एक प्रतिवर्स के लिए दो तरफा परीक्षण होता है उती प्रकार वैकटियक परिकल्पना के किसी विद्योप दिवा में बुकाव न होने पर दि प्रतिवर्स के लिए भी दो-तरका परीक्षण का उपयोग किया जाता है।

६ १०८ -परीक्षण पर प्रतिबध

मह स्मान देने योग्य बात है कि इस परीक्षण का आधार यह अभिधारणा है कि दोनो समस्टियों के प्रसरण समान है। यदि प्रसरण बहुत भिन्न हो तो इस परीक्षण का जरथोग युक्तियुक्त नही है। यह स्थाभाजिक है कि आप जानना चाहे कि दोनो समिष्टियों के प्रसरण बराबर है या नहीं। यह किज प्रकार मालूम किया जाय ?' 'दो प्रमामान्य बटनों के प्रसरण बराबर हैं " इस निराकरणीय परिकल्पना की परीक्षा करने के साधन सत्तव में साध्यिकों के पास है। विना इस प्रकार के परीक्षण के अथवा बिना छवें अनुभव के इस अभियाणा को कोई भी वैज्ञानिक मानने को तैपार नहीं होगा। आपका यह सोचना ठीक है कि इस अभियाणा का परीक्षण पहलेशीर /-परीक्षण का प्रयोग वाद में होना वाहिए।

इस मध्ये परीक्षण के लिए हमें एक नशीन प्रकार के बटन का उपयोग करता पडता है जिसे प्र-बटन कहते हैं । इसका और इसके उपयोग का सक्षित्त बर्गन अगले अध्याप में दिया गया है।

अव्याय ११

F-वंटन

& ११.१ F-वटन और x²-वटन का सम्बन्ध

मान लोजिए कि Xऔर Y दो बादु ज्लिक चर है । X का बटन x_{n1}^2 तथा Y का बटन x_{n2}^2 है । तब $F=\frac{X}{n_0}$ का घनत्व-फलन f(x) निम्निलिख है—

$$f(x) = \left[\frac{n_1}{n_2}\right]^{\frac{n_2}{2}} \frac{\Gamma\left[\frac{n_2 + n_2}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n_1}{2}\right]\Gamma\left[\frac{n_2}{2}\right]} \quad \frac{\frac{n_1}{x^{\frac{1}{2}} - 1}}{\left[1 + \frac{n_2}{n_2}x\right]^{\frac{n_1 + n_2}{2}}} \cdots \text{ (II.I)}$$

इस बटन की n_1 तथा n_2 स्वातत्र्य-संस्थाओं का I^* —बटन कहते हैं। सक्षेप में इमें Fn_1 , n_2 से भी सूचित करते हैं। इस बटन का प्रयोग बहुत अधिक होने के \int काएग, नाहिसकों ने विभिन्न स्वातत्र्य-संस्थाओं के F^* —बटनों के प्रतिशतता-विदुत्रों की सारणी तैयार कर रखी है।

सारणी संख्या 11 1 कछ P-बटनो के ५ और 1 प्रतिशत बिंद

वटन	5% बिदु	1% बिहु
$F_{s,s}$	4.76	9.78
F _{3,15}	3 29	5.42
F _{3,21}	3.07	4 87
$F_{4,11}$	3 36	5.67
F ₅₊₁₅	2-90	4.26
F,21	2.48	3.64
F	3.10	5.30

विस्नव सारणी के लिए देखिए

"Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research" by Fisher and Yates

५ ११२ परिकल्पना परीक्षण

मान भौजिए कि दो प्रसासान्य संमण्टियाँ है जिनके नास्य कमरा μ_1 मीर μ_2 तथा प्रसारा कमरा μ_2 और α_2 है। इन दो समील्यों में से कमरा μ_1 तथा μ_2 पितमाण के याद्विकार प्रतिदर्श स्वतन रूप से बुने जाते हैं। इन प्रतिदर्शों के प्रसारण कमरा s_2 ⁸ और s_2 8 है।

भत
$$\frac{n_1 s_1^{2}}{\sigma_1^{2}}$$
 एक $x_{\sigma_{1,1}}^{2}$ चरहै
तथा $\frac{n_2 s_2^{2}}{\sigma_{\alpha}^{2}}$ एक $x_{\sigma_{2,-1}}^{2}$ चरहै।

ये दोनो चर एक दूसरे से स्वतन भी है। इसलिए

$$F = \frac{n_1 s_1^2}{(n_1 - 1)\sigma_1^2} - \frac{n_2 s_2^2}{(n_2 - 1)\sigma_2^2} \ \text{ver} \ F_{n_1 - 1, n_2, 1} \ \text{ver} \ \xi \ t$$

यदि निराकरणीय परिकल्पना यह है कि ज्र²=ज्2 तो इसके अन्तर्गत

$$F = \frac{n_1 s_1^2 / n_1 - 1}{n_2 s_2^2 / n_2 - 1}$$
 एक $F n_1 - 1, n_2 - 1$ चर है। इस सुण का प्रयोग परि-

कल्पना की परीक्षा के लिए सरलता से किया जा सकता है। यदि प्रयोग में प्रेक्षित F का मास Fn,-In,-I के एक पूर्व निक्षित प्रतिसत्तता बिन्दु से लिमिक ही तो हम निराक्त प्रतिप्र परिकल्पना को अस्वीकार करते हैं। यदि इस परिकल्पना को अस्वी-कार किया जाता है तो दिन्दित्ववीय (--परीक्षण युक्ति-स्वयत्त वही है। यदि परि-काण डारा परिकल्पना को अस्वीकार नहीं किया जाता नो इसका यह अर्थ नहीं है कि उसकी सत्वता चिंद हो गयी। इसका अर्थ केवल उत्तना हो है कि प्रयोग के फल परिकल्पना के सल्य होने की स्थिति में काफी सभय ये और इस कारण वे परिकल्पना के विकट्ट कोई साहय गड़ी देते।

§ ११३ उदाहरण

आइए, अब यह देखा जाय कि इसका उपयोग पिछले उदाहरण में किस प्रकार किया जा सकता है। निराकरणीय परिकल्पना Ho

भारतीय और जावा द्वीपीय गर्शी में चीनी के बंटनो के प्रसरण बराबर है।

बैकल्पिक परिकल्पना $H_{\!\scriptscriptstyle \lambda}$

थे प्रसरण बराबर नहीं है।

अस्वीकृति क्षेत्र

यदि
$$F=rac{10s_{2}^{2}/9}{10s_{2}^{2}/9}=rac{s_{2}^{2}}{s_{2}}$$
 का प्रेक्षित मान F 9,9 के पाँच प्रतिशत बिंदु

3'19 से अधिक हो तो बैकल्पिक परिकल्पना की तुलना में निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकार कर दिया जायगा। (देखिए सारणी सस्या II'I)

विश्लेवण

प्रयोग के प्रेक्षणों के अनुसार

$$F = \frac{60.1}{54.9}$$

< 3.19

~ 3.19

निष्कर्य—प्रेक्षणो के आधार पर हम निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकार मही कर सकते।

प्रयोग-विश्लेषण में 1- चटन का उपयोग बहुत अधिक होता है। इसका वर्षन उन अन्य अध्यायों में दिया हुआ है जिनका सबध प्रयोग-अभिकल्पना और प्रयोग-विश्ले पण से हैं। इस अगर के उदाहरण के साथ हुल परिकल्पना की जीच के उदाहरणों और साधारण परिचय को समाद करते हैं और अब इस अग्रेस्ट अध्याय में परिकल्पना की जांच के साधारण सिदातों का अध्ययन करेंगे !

अध्याय १२

परिकल्पना की जाँच के साधारण सिद्धान्त

८ १२:१ जाँच की परिचित विधि की आलोचना

अब तक परिकल्पना की जाँच की मनीवैज्ञानिक पृष्ठभूमि को आप मली-मांति समझ गये होंगे । हम पहिल किसी प्रतिवर्धक (statistic) की स्थापना करते हैं जिसके मान के लाधार पर हम परिकल्पना को स्वीकार अपवा अल्लोकार करेंगे । हम प्रतिवर्धक को स्वीकार अपवा अल्लोकार करेंगे । हम प्रतिवर्धक को परिकल्पना—परीक्षण का निक्कप (cticetion) कहा जाती । अपने से कुछ कोनो को यह विचित्र लगा होगा कि इस वर्ष के लिए हम इस निक्ष्य के प्रीक्षित मान की प्रायिकता का कलन नहीं करते, किन्तु इस घटना की प्रायिकता का कलन करते हैं कि निक्षय का मान या तो उपर्युक्त प्रेक्षित मान के बराबर हो अयवा उससे भी अधिक हो। कराचित्र आप अल्पयर कप से इस तरीके के आचार को सत्मतर हा। परमु कुछ पाठक ऐसे भी हो सकते हैं जिन्हों साध्यक पर सहे हो कि वह सानदूषकर केवल आसानी के लिए ही इस प्रकार से प्रायिकता का कलन करता है तथा इसमें सुनिक छुछ भी नहीं है।

फिर भी यह तो स्पट ही है कि किसी भी सतत बटन में, जवाहरण के लिए एक प्रमामान्य बटन में, किसी विशेष मान के प्रेक्षण की प्राधिकता शून्य है। असतत बटन में भी यदि कर तैकड़ी मान बारण कर सकता हो तो किसी भी विशेष मान को धारण करने और अपने का प्राधिक पटना की प्राधिकता कहत छोटो हो सकती है। इस कारण केवल प्रीकृत घटना की प्राधिकता के छोटे होने पर यदि हम निराकरणीय परिकल्पता को अस्वीकार करने का निर्णय करें तो प्रयोग करने की कीई आवश्यकता ही नहीं है। क्योंकि यह स्पट्ट हैं कि बाहे प्रयोग का एक कुछ भी हो उसकी प्राधिकता बहुत ही कम अथवा शून्य होगी

और इस कारण हम उसको अस्वीकार कर देंगे।

५ १२ २ अस्वीकृति क्षेत्र

वास्तव में यदि हम परिकल्पना को पाँच प्रतिशत स्तर पर अस्वीकार करने का निरुवय करते हैं तो हमें एक अन्तराल वयवा धानो के एक कुलक की परिभाषा देनी होगी जिसमें बेलित मान के पाये जाने की प्राधिकता परिकल्पना के अन्तर्गत पांच प्रतिवात हो। इसको अस्बीकृतिन्थेत्र अववा संदाय-अंतराख (critical region) कहते हैं। यदि प्रेप्तित भान अस्बीकृतिन्थेत्र में पाया जाता है तब हम निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकार करते हैं, अन्यवा नहीं। इस प्रकार यदि परिकल्पना वास्तव में स्टब हो तो मलती से उसको अल्बोकार करने को प्राधिकता पांच प्रविद्यत रह जाती है।

मान लीजिए, हम प्रतिवर्ध माध्य और प्रत्याधित माध्य के अन्तर को $(\tilde{x}-\mu)$ से मूचित करते हैं । यदि हम अव्वीकृति-क्षेत्र को इस प्रकार चुनें कि जब $\tilde{x}-\mu=1$ हो तब तो हम परिकल्पना को अव्वीकार कर देंगे, पन्तु जब यह अत्तर बहुत अधिक हो, जैसे 3 या 4, तब हम परिकल्पना को अव्वीकार नहीं करेंगे हो यह मनोचैंजानिक इंिटकोण से अनुचित होगा। यह स्वाप्राधिक है कि अव्वीकृति-क्षेत्र में प्रेशित और प्रत्याधित मानों के अन्तरों को व्यक्त कर्रान्त लोज सद्याएँ वडी-बडी हो और यदि कोई विशेष सस्वा इस क्षेत्र में विद्यान हो तो उससे बडी सब सस्वाएँ भी अव्वीकृति-क्षेत्र में ही हो।

§ १२'३ एक तरफा परीक्षण

यदि किसी के पास एक ऐसी बैकत्यक परिकल्पना है जिसके अनुसार हम पनात्मक अलार की आशा कर सकते हैं। तब प्रका केवल निराकरणीय परिकल्पना की जीव ही नहीं के सिक्त प्रकार की स्थान केवल निराकरणीय भीर वैकत्यक परिकल्पनाओं में से एक का चुनाव करना है। इस प्रकार की स्थिति में स्वामाविक है कि इम एकतरका परीक्षण का प्रयोग करें।

🞙 १२ 😮 विभिन्न निकर्षों से अलग-अलग निष्कर्ष निकालने की संभावना

क्रमर लिखे तक कई लोगों को सतीपश्रद और संघेष्ट मालूम हो सकते हैं। फिर भी परितरंशना परीजाण के सिद्धान्तों का व्यवस्थित विकास खावस्थक हैं। एक ही अतिदर्श के प्रेसणों से ऐसे अनेक प्रतिदर्शन (statistic) वन सकते हैं जिनके बटमा को हम निराकरणीय परितरंशना के अन्तर्शत जानते ही। यह समय है कि प्रयपि किसी एक प्रतिदर्शन के दृष्टि-कोण से परिकल्पना को अल्बीकार किया जा सकता है परन्तु किसी दुखरे प्रतिदर्शन के विचार से उस परिकल्पना को त्यागने का कोई कारण दृष्टिगोचर न हो। ऐसी अवस्था में हमें यह जानना खावश्यक है कि दिस प्रतिदर्शन के आधार पर परीक्षण करें। एक उदाहरण के द्वारा हम उपर के बचन को स्पष्ट कर देना चाहते हैं। मान लीविए कि हम जानते हैं कि समस्टि प्रसामात्म है और उसका मानक विचलन ० है। हम इस निराकरणीय परिकल्पना का परीक्षण करना चाहते हैं कि उसका माष्य µ है। इस परिकल्पना के लिए हम एक परीक्षण का वर्णन पहले ही कर चुके हैं जिसमें प्रतिदर्श-माध्य और µ का जन्तर एक विजय मान से अधिक होने पर हम परिकल्पना का तथा करते हैं। इस परिकल्पना की जॉब का इसरा तरीका निम्नांकिसत भी हो सकता है।

हम यह जानते हैं कि एक प्रसामान्य समिट्ट के माध्य और माध्यका बराबर होते हैं । इसिलए किसी प्रेसित राशि के में के ना होने की जानों हो प्राप्तिकता है जितनी μ से अभिक होने की । इसिलए परिकल्पना के अनुसार यह आधा की जातों है कि प्रीप्तिक होने जितनी राशियों μ के छोटी होगी जतनी हो μ से बड़ी भी होगी। इस कारण μ से बड़ी राशियों के सक्या बहुत अगिक होने पर अपना बहुत कम होने पर मी हम परिकल्पना का रागा कर सकते हैं। इस प्रकार प्रसामान्य बटन के माध्य के μ होने कि लिए जगर लिख से परीक्षण हो सकते हैं वो एक-दूसरे से भिन्न हैं। सकता है कि एक के अनुसार परिकल्पना अस्बीहत हो और दूसरी के अनुसार नहीं हो। उसहरण के लिए सी

जहाँ में मितदर्श माध्य और #मितदर्श परिमाण है। # उन मेक्सणों की सच्या है जिनके मान µ= 5 से कमा है ज्ञा # अज मेक्सणों की सक्या है जिनके मान 5 से अभिक है। जिस सिप्त बटन के मानक 25 और ‡ हो। उसके द्वारा № के 15 मा इससे भी अभिक होंगे की माधिकरता का कन्नन किया जा सकता है।

अपूर्ण B-फलन सारणी के अनुसार यह प्राधिकता 0 2121781 है। यह इतनी अधिक है कि इसके आघार पर परिकल्पना को अस्वीकार करना समय नहीं है।

किन्तु दूसरी ओर हमें पता है कि परियत्पमा के अन्तर्गत $\dfrac{\overrightarrow{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ का बटन $N(o~\mathbf{I})$

है. इसलिए परिकल्पना-परीक्षण $t = \frac{\vec{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ को निक्ष मानकर भी किया जा सकता

है। किन्तु दूसरी ओर हमें पता है कि परिकल्पना के अन्तराँत $\frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{\pi}}$ का बटन

 $N(\mathsf{o}, \mathsf{t})$ है इसलिये परिकल्पना-परीक्षण $t = \left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \right|$ को निकय मानकर भी

किया जा सकता है। और प्रयोग में $t=-\frac{1}{2/5}$

== 2.5

प्रसामान्य बटन के अनुसार निकाय १ के 2-5 अथवा उससे भी अधिक होने की प्रापिकता 5% से कम है। इस कारण हम प्रसामान्य समस्टि के भाष्य के मान के 5 होने को अस्तीकार करते हैं।

इस प्रकार एक ही प्रतिवयां पर निभंद थो परीक्षणों के नवीजे अलग-अलग होना समय है। इस द्वरा में यह जानना आवस्त्यक है कि विगंद किस परीक्षण पर आधा-रित होना चाहिए। यह स्पट है कि यदि हम 5% के स्तर पर परीक्षण करते हैं वी परीक्लपना के स्वय होते हुए भी उबके अस्वीकार किये जाने की यूटि की प्रांतिकता हर एक परीक्षण के लिए समान होगी। इसलिए इस प्रकार की यूटि की प्रांतिकता हर होने को हम परीक्षण बुनने के लिए निकय (criterion) नहीं मान सकते। नीमन औरपीयरतन (Neyman and Pearson) ने इसके लिए एक अन्य निकार का प्रकित पावत किया है तथा उतके उत्तर परिकल्पना-परीक्षण के सिद्धान्ती का एक बीचा स्वा किया है। इसका वर्णन आमें के कुछ पृथ्ठी में किया गया है। परन्तु प्रो० रोताव्य फितार और उनके अनुमानियों को एक अन्य निकारवाद है जिसके अनुसार बैजानिक अध्यत में नीमन और पीयरसन द्वारा प्रतिपादित विचार-प्रवित्त विकार नात नहीं है। इसलिए प्रो० फितार की विचारचारा का भी क्ष्में स्वेत्त विचार-प्रवित्त विकार की विचारात्र है है।

§ १२५ नीमन-पीयरसन सिद्धान्त

नीमन-भीयरसन सिद्धान्त का आरम्भ इस प्रेशण से होता है कि किसी भी परि-कल्पना-परीक्षण के उपयोग में दो प्रकार की शृदियाँ समय है। उनके अनुसार परीक्षण के अत में दो ही फल हो सकते हैं। या तो हम परिकल्पना को स्वीकार करें अपया अस्वीकार कर में। यदि परिकल्पना सत्य न हो और हम उसे स्वीकार कर के अपया वह सत्य हो और हम उसे अल्काकार कर दें—इन होनो ही स्वितियों में हम भूल करते है। इनकोसिद्धान्तमें कमव दूसरो और पहली किस्म की नृटि (errors of second and first kind) कहते हैं।

§ १२.५.१ पहली प्रकार की शृटि—परिकल्पना को अस्पीकार करने की भूल अब बह बास्तव में सत्य है।

५ १२'५ २ दूसरी प्रकार की नुटि—परिकल्पना को स्वीकार करने की भूल जब कि वह वास्तव में असत्य हैं।

यदि कोई परीक्षण दोनों प्रकार की वृटियों की प्रायिकता को अधिक से अधिक घटा सके तो उसको दूसरे परीक्षणों की अपेक्षा अच्छा समझा जायेगा। यदि गरिकल्पना सत्य ही तो एक अच्छे परीक्षण के लिए उसे अस्वीकार करने की प्रायिकता बहुत कम होनी चाहिए। यदि बह सत्य न हो तो यह प्रायिकता बहुत अधिक होनी चाहिए।

६ १२'५'३ सिद्धान्त

इस तरह यदि दो परीक्षणों के लिए प्रचम प्रकार की बृदि की प्राधिकता बरावर हो जिसका परिमाण «हो तो इनमें से हम उस परीक्षण को चुनेंगे जिसके लिए असत्य परिकल्पना को अस्पीकार करने की प्राधिकता अधिक हो।

६ १२ ६ परीक्षण सामर्थ्य और उसका महत्त्व

§ १२-६-१ परिभापा—चिंद परिकृत्यता वसत्य हो तो उसे अस्वीकार करने की प्राप्तिकता को परीक्षण-सामर्च्य (power of test) कहते हैं ।

\$ १२'६'२ उदाहरण-—हम सिद्धात की मीनासा एक मानूकी उदाहरण से आरम करेंगे। और इस उदाहरण की ही सहायता से बुख नयी अवधारणाओं (concepts) की परिमाण भी होंगे।

मान लीजिए कि प्रका है एक परिकल्पना के परीक्षण का जिसके अनुसार समीट का भाग्य µ है। हम बह परीक्षण समिट पर बिना किसी श्रेक्षण के भी मर सकते हैं। कागज के छोटे-छोटे बिक्कुक समान सी ट्रक्ट कर लीजिए और उन पर कमसा एक से किन्द सी जब और अक्सएएँ जिस्स कीजिए। इन दुक्कों को अली-पाँति निजन जीजिए और इसके परवात् जीक नव करके जनमें ते एक को चुन कीजिए।

हमारा परीक्षण निम्नलिखित है-

यदि चुने हुए टुकडे पर लिखी हुई सच्या 95 से अधिक हो तो परिकल्पना को अस्वीकार कर दीजिए, अन्यया उसको स्वीकार कर छीजिए । क्योकि इस परीक्षण का उस समिद्ध से कुछ सबब नहीं है जिसके सबब में परिकल्पना है, इसिलए यह मूर्खता-पूर्ण मनीत होता है, और है भी। परतु यह ध्यान देने योग्य बात है कि यदि परिकल्पना सत्य है तो इस परीक्षण द्वारा उसके अस्वीकृत होने की आधिकता केवल 5% है। इस प्रकार इस परीक्षण के लिए क्व० 05 है और यदि परीक्षणों की सुलमा करने के लिए इस केवल प्रयम प्रकार की जुटि का ही प्रयोग करते है तो यह परीक्षण उतना ही उसम है जिनना कि प्रनृत सबक्टि से चुने हुए एक हजार प्रेबणी पर आधारित ऐसा परीक्षण

दनकी वास्तिविक लुक्ता तो तब होनी है जब कि हम इन परीक्षणी की सामप्यें का पता काति है। मान कीविष् कि समिद्ध का माध्य μ नहीं है बैंकि μ है। हमारे लागज के दुक्ता के परीक्षण बारा माध्य के μ होने की परिकरना के अर्वीकार किये जाने की प्रायिकता 5% है। इसिए इस परीक्षण की सामप्य कि ==05 है। यह एक ऐसा परीक्षण है जिसमें परिकरणा के अर्वीकार होने की प्रायिकता 5% है। यह एक ऐसा परीक्षण है जिसमें परिकरणा के अर्वीकृत होने की प्रायिकता वहीं रहती है जादे परिकरणना सत्य हो और बाहे सत्य से बहुत दूर। यह स्थिति निश्चय ही अननीपजनक है। परतु इससे भी अधिक अस्वीयजनक स्थिति ही सकती है यदि सत्य होने पर भी परिकरणना के अस्थिकत होने की प्रायिकता क उपके अस्था होने पर अस्थिकत होने की प्रायिकता कि से भी अधिक हो। इस प्रकार की अनागजीय स्थिति उत्यन्त करने वाले परीक्षण को अभिनत परीक्षण (bused test) कहते हैं।

६ १२ ६ ३ अभिनत और अनभिनत परीक्षणो की परिभाषा

अभिनत परीक्षण— यह परीक्षण है जिसकी सामस्य प्रथम प्रकार की जुटि की प्रायिकता से कम हो याने $\beta < \alpha$ । जो परीक्षण अभिनत नही होता उसे अनिभनत (unbiased) कहते हैं।

६ १२७ प्राचल का अवकाश

बयोकि हम यहां परिकल्पना परीक्षण के साधारण सिद्धातो की व्याख्या कर पहें हुँ हमारे अध्ययन का क्षेत्र बेनल भाष्य अवना प्रसरण से सर्वचित परिकल्पनाओं तक हो सीमित नहीं पहना चाहिए। हम यहां समिट के किसी भी प्राचल से सर्वचित परिकल्पना पर विचार करेंसे। यह प्राचल समिट के माध्यका, चतुर्यी, तृतीय पूर्ण आदि में से कोई भी ही सकता है।

मान लोजिए कि हम Ω (अोमेगा) द्वारा प्राथल के अवकाश को सुनित करते हैं। इस अवकाश से हमारा तारार्य उन सब मानो के कुलक से हैं जो प्राथल के

छिए समब हो। इस प्रकार प्रसामान्य बटन के माध्य के छिए—∞से छेकर-्- ००तक प्रत्येक पान चारण करना समय है। इसिछिए माध्य μ के लिए खबकाश Ω समस्त बास्तिक सख्याओ (real numbers) का कुलक है। है। प्रसामान्य बटन में ही। प्रसाम बन स्वराम केवल समस्त मनात्मक सख्याओं का कुलक है। हिपद प्रदास पर में अनुवाद केवल समस्त मनात्मक सख्याओं का कुलक है। हिपद पर में अनुवाद के लिए खबकाश ० और 1 के बीच की खब्या हो है।

६ १२[.]८ निराकरणीय परिकल्पना

मान क्षोजिए कि परिकल्पना यह है कि Ω के एक उपकुलक ω (क्षोमेगा का छपुक्प) में प्राचल 0 (थोटा) स्थित है। इसको हम निम्नलिखित उग से सुनित करते हैं—

0 6 0

और इसे 8 स्थित है ध में पढते है।

उदाहरण के लिए दिगद बटन के अनुगत p के लिए परिकल्पना यह हो सकती है कि उसका मान 0.2 और 0.3 के बीच की कीई सब्दा है। इस स्थिति में ∞ उन सब सब्दामी का कुलक है जो 0.2 और 0.3 के बीच मे है। बहुधा इस उपकुलक अ में केवल एक ही सब्दा होती है। उदाहरण के लिए इस परिकल्पना में कि समस्टि की माध्यिका 6 कै. अ में केवल एक सब्दा 0 ही है।

िंतस परिकल्पना $\theta \in \omega$ का हुन परीक्षण करते हैं उसे निराकरणीय परिकल्पना (null hypothess) H_s कहते हैं 1 बैकस्पक परिकल्पना (alternative hypothess)) H_1 यह है कि ' θ की स्थिति ω में नहीं है'। इसको हम निम्निलिश्वत क्षेत्र से चिंपचा करते हैं

θ € (Ω-ω)=ω'

यहाँ ω' अथवा ($\Omega-\omega$) द्वारा हम Ω में स्थित उन राशियों को पूचित करते हैं जो ω में नहीं है।

१२९ प्रतिदर्श और प्रतिदर्श-परिमाण

यह बाबश्यक है कि परिकरपना परीक्षण ऐसा होना चाहिए जो समस्टि पर किये हुँए कुछ प्रेक्षणों पर आधारित हो। इन प्रेक्षणों के कुरूक को प्रतिदर्श (sample) कहते हैं और प्रेसणों की सस्या को प्रतिवर्श-र्यारमाण (sample size)। पदि प्रतिवर्श परिमाण n हो और विभिन्न प्रेक्षण (x1 x2, , , , , हो तो हम इनके इस विशेष कम को x2 से सूचित करते हैं।

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{x} \qquad . \tag{12 I}$$

§ १२ १० स्वीकृति और अस्वीकृति-क्षेत्र

 \underline{x} के कुछ मान ऐसे होंग जिनके लिए हम H_0 को अस्वीकार कर हेंगे। इन सब मानों के कुछक C को परीक्षण का सदाय-ज तराक (critical region) वहते हैं। इसी का दूसरा नाम अस्वीकृतिन्क्षेत्र भी हैं। \underline{x} के अन्य मानों के कुछक A को —जिन के लिए H_0 को अस्वीकार नहीं किया जाता—स्वीकृतिन्क्षेत्र (acceptance region) कहते हैं।

५१२ ११ प्रथम प्रकार की चुटि की प्रायिकता और सामध्यें

C पर आधारित परीक्षण के लिए प्रथम प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता lpha(c) निराकरणीय परिकल्पना के सत्य होते हुए भी C में lpha के पाये जाने की प्रायिकना है।

$$\alpha(c) = P[x \in C \mid H_o] \qquad (12.2)$$

किसी अन्य परिकल्पना H_1 के सत्य होने पर $x \triangleq C$ में पाये जाने को प्रायिकता को $\beta(c)$ से सुचित करते हैं और यह C पर आधारित परीक्षण का सामर्थ्य (power) है

$$\beta(\epsilon) = P[x \in C \mid H_1] \qquad (12 3)$$

६ १२⁻१२ तुल्य तथा उत्तम परीक्षण

यदि C और C' दो अस्वीकृत क्षेत्र ऐसे हो जिनके लिए

$$\alpha(C) = \alpha(C)$$

and $\beta(C) = \beta(C)$

सो C और C पर निभर परीक्षणों को सूल्य (equivalent) समझा जाता है।

यदि
$$\alpha(C) \leqslant \alpha(C)$$

तथा $\beta(C) \leqslant \beta(C')$

और यदि C और C' तुल्य न हो तो C को C' से उत्तम (superior) समझा जाता है।

६ १२ १३ प्रमेय

मान लंबिए H_0 के अनुसार \underline{x} पर पनत्व फलन $f_0(\underline{x})$ है तथा H_1 के अनुसार $f_1(\underline{x})$ है और λ कोई बनात्मक सन्धा है। यदि C_{λ} एक ऐसा अर्थाकृति-क्षेत्र है कि एसके किसी भी खिनु \underline{x} के लिए $f_1(\underline{x}) > \lambda f_0(\underline{x})$ है तथा उसके बाहर किसी के भी खित्र के लिए $f_1(\underline{x}) < \lambda f_0(\underline{x})$ है, और C एक अन्य अर्थ्यकिति-क्षेत्र है तो इन कर्योकृति-अेत्र गैं तर निर्मय परोहालों के सामध्यों का अतर इनकी प्रथम प्रकार की कृटियों की प्राधिकताओं के अतर के कल-कै-लम λ नुगा होगा।

उपपत्ति—

सामध्यों का अवर =
$$P\left[\underbrace{z} \in C_{\lambda} | H_{t}\right] - P\left[\underbrace{z} \in C | H_{t}\right]$$

= $P\left[\underbrace{z} \in (C_{\lambda} - C_{\lambda})U(C_{\Omega} C_{\lambda})|H_{t}\right] - P\left[\underbrace{z} \in (C_{\lambda} - C_{\lambda})U(C_{\Omega} C_{\lambda})|H_{t}\right]$

$$= \{P\left[\underline{x} \in (C_{\lambda} - C)|H_{i}\right] + P\left[\underline{x} \in (C \cap C_{\lambda})|H_{i}\right]\}$$

$$-\langle P[x \in (C - C_{\lambda})|H_{\lambda}] + P[x \in (C \cap C_{\lambda})|H_{\lambda}] \rangle$$

$$=P[\underline{x} \in (C_1-C)|H_1]-P[\underline{x} \in (C-C_1)|H_1]$$

$$\geq \lambda P[x \in (C_1 - C_1)|H_0] - \lambda P[x \in (C - C_1)|H_0]$$

$$= \lambda \{ P[\underline{x} \in C_{\lambda} | H_{0}] - P[\underline{x} \in C | H_{0}] \}$$

$$==\lambda[\sigma(C_{\lambda})-\alpha(C)]$$

[प्रथम प्रकार की बृटियों की प्रायिकताओं का अंतर]

यहाँ $(C-C_{\chi})$ से \underline{x} के उन मानों के कुलक को सूचित किया गया है जो C में तौ हैं परतु C_{χ} में नहीं हैं । इसी प्रकार $(C_{\chi}-C)$ से उन मानों के कुलक को सूचित किया गया है जो C_{χ} में है परतु C में नहीं । जिन सक्या 31 से यह अधिक स्वष्ट हो जागा। इस उपर्शत में इस सान का प्रयोग किया गया है कि

$$P[\underline{x} \in (C_{\lambda} - C)|H_1] = \int_{(C_{\lambda} - C)} f_1(\underline{x}) d\underline{x} \qquad \dots (12.4)$$

चित्र ३१

१ १२ १४ ग्राह्म परीक्षण

यदि $\alpha(C_{\lambda})=\alpha$ (C) वो हमें यह पता चल्ता है कि C_{λ} पर आधारित परीक्षण किसी भी ऐसे परीक्षण से कम सामन्यंवान् नहीं है विसकी अगम प्रकार की भूल की प्रायिकता $\alpha(C_{\lambda})$ है। इस प्रकार के परीक्षण को ब्राह्म (admissible) कहते हैं।

§ १२·१५ अस्वीकृति-क्षेत्र के चुनाव के अन्य निकप

नीमन पीयरसन खिद्धात के अनुसार हमें ऐसे परीक्षण की चुनना चाहिए जो याह्य हो। जबर के प्रमेय द्वारा हम जानते हैं कि प्राह्म परीक्षण की बेसे प्राप्त निया जा सकता है। हो सकता है कि आप परीक्षण के चुनाव के लिए किसी अन्य निक्ष को अंतिक उत्तर के लिए आप सायद अर्थीकृति क्षेत्र को हस प्रकार चुनना अच्छा समझे कि दोता था। आइए, देखे कि इस प्रकार के निक्ष के लिए अप्रीहिति क्षेत्र को बैढने का क्या गरीका ही सबता है।

पदि α_1 और α_2 द्वारा हम कमश प्रयम और द्वितीय प्रकार की तृदियों की प्रायिकताओं को सुवित करें तो हमारा उद्देश्य एक ऐसे अस्वीकृति प्रदेश की मालूम करता है जो $p\alpha_1 + q\alpha_2$ को न्यूनतम कर दे जहाँ p और q दो धनारमक ज्ञात संस्थाए है।

किसी विशेष अस्बीकृति-क्षेत्र C के लिए

$$\begin{aligned} p_{\alpha_1}(C) + q_{\alpha_2}(C) &= pP[\underline{x} \in C \mid H_0] + qP[\underline{x} \in (\Omega - C) \mid H_1] \\ &= pP[\underline{x} \in C \mid H_0] + q(\mathbf{t} - P[\underline{x} \in C \mid H_1] \\ &= q + (pP[\underline{x} \in C, pf_0 \geqslant qf_1 \mid H_0] \\ &- q pP[\underline{x} \in C, pf_0 \geqslant qf_1 \mid H_0] \\ &+ \{pP[\underline{x} \in C, pf_0 \leqslant qf_1 \mid H_0] \end{aligned}$$

 $-\{pP[x \in C, pf_0 < qf_1 \mid H_0]\} \dots$ $-qP[x \in C, pf_0 < qf_1 \mid H_1] \dots$ $\{12.6\}$

निराकरणीय परिकल्पना H_o

X का वटन आयताकार (tectangular) है जिसका परास (0,2) है।

वैकल्पिक-परिकल्पना $H_{\!\scriptscriptstyle I}$

X का बटन आयताकार है जिसका परास (1,5) है।

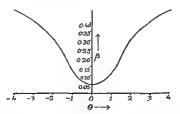
$$f_{c}(x)=rac{1}{2}$$
 यदि $0< x<2$ }(12-7)
नहीं तो $f_{c}(x)=0$ यदि $1< x<5$ }(12-7)

मान की जिए कि हम जब अस्बीकृति-क्षेत्र को मानूम करना चाहते हैं जिसकें लिए $2\omega_+ + \omega_0$ का मान न्यूनतम है । उत्तर के प्रमेश के अनुसार यह क्षेत्र ऐसा है जिसमें x के वे सब मान ऐसे हो जिनके लिए $2f_0(x) < f_1(x)$ हो और ऐसा कोई भी मान न हो जो इस अवस्ता को सन्तर्यन करें ।

यह आसानी से देखा जा सकता है कि यह क्षेत्र (2,5) है।

§ **१२**.१७ कुछ परिभाषाएँ

र्६ १२'१७'१ सामर्थ्य-वक (power curve) परीक्षण की सामर्थ्य केवल अस्वी-कृति-क्षेत्र पर ही नही बल्कि वैकल्पिक परिकल्पना पर भी निर्भर करती है। प्रत्येक



चित्र ३२--- ७=० के एक परीक्षण का सामध्यं वक

मुनिश्चित वैकल्पिक परिकल्पना के लिए परीक्षण की एक विशेष सामध्यें होती हैं। इस सामध्यें की प्राचल का एक फलन समझा जा सकता है । प्राचल के विभिन्न मानी के लिए यदि परीक्षण की सामध्यें को भ्राफ द्वारा चिनित किया जाय तो एक वक भ्राप्त होगा जो सामध्यें वक कहलाता है। चिन ३२ में ऐसा सामध्यें वक दिखाया गया है जो निराकरणीय परिकल्पना ७=० ये सबधित है।

र् १२'१७ २ एक-समान अधिकतम सामर्थ्यवान् परीक्षण (uniformly most powerful test)

र्याद किसी परीक्षण की सामध्यं प्रत्येक विकल्प (alternative) के छिए किसी भी दूसरे परीक्षण को सामध्यं से अधिक हो तो उसे एक समान अधिकतम सामध्यंशन कहा जाता है।

६ १२'१७'३ स्थानीयत अधिकतम सामर्थ्यवान् परीक्षण (loally most powerful test)

यदि निराकरणीय परिकल्पना से किसी विश्वय विकल्प की तुळना करने के लिए एक परीक्षण दूसरे परीक्षणों की अपेक्षा अधिक सामर्थ्य रखता है, और यदि इसके लिए ८ का मान किसी अन्य परीशान के ८ से अधिक नहीं हैं तो उसे इस विकल्प के लिए स्वानीयतः अधिकतम सामर्थ्यवान कहा जाता है।

§ १२'१७ ४ एक-समान अनिभानत परीक्षण (Umformly unbiased test)
यदि प्रत्येक विकल्प (प्राचल = θ) के लिए सामर्थ्य β (θ) प्रथम प्रकार को नृष्टि

यदि किमी विकल्प (प्राचल $=\theta_1$) के लिए सायध्ये β (θ_1) प्रथम प्रकार की मृद्धि की प्रायिकता α से कम हो तो हम कहते हैं कि $\theta=\theta_1$ पर परीक्षण

स्यानीयतः अभिनत है ।

त्तिणत द्वारा यह सिद्ध किया जा सकता है कि किसी भी बियोप विकल्प के लिए स्थानीयत अधिकतम सामध्येनान् परीक्षण मालूम करना हमेवा समन है और में परीक्षण सर्देव स्थानीयत अनिकार की बीते हैं। इसके विपरीत गर्याय कुछ विद्योप परिकल्पानों के लिए एक समान अधिकतम सामध्येनान् परीक्षण वर्तमान है, परतु अन्य अनेक महत्त्वपूर्ण परिकल्पानां के लिए इस प्रकार का कोई परीक्षण करना की ही है। यदि किसी नियंकणीय परिकल्पान के लिए एक समान अधिकतम प्रामर्थवान् परीक्षण समान अधिकतम प्रामर्थवान् परीक्षण वर्तमान है अथया यदि हम उसके किसी निकल्प विदेश में ही

रुचि रखते हैं तो हमें उचित परीक्षण को चुनने में कुछ कठिनाई नहीं होगी। अन्यथा जो परीक्षण चुना जायगा उसका अन्य परीक्षणों से उतम होना प्राचल के वास्तविक मान पर निर्मर करेगा।

६ १२ १८ चदाहरण

एक प्रसामान्य समिष्ट $N(\mu \sigma)$ का प्रसरण σ^s ज्ञात है और μ अज्ञात l इस समिष्ट में से μ परिमाण का एक यादुन्छिक प्रतिदर्श चुना जाता है। इसके आधार पर निराकरणीय परिकल्पना $\mu = \mu_a$ की परीक्षा करनी है।

यदि इन प्रेक्षणों को $x=(x_1,x_2, \dots x_n)$ से सूचित निया जाय ती इनका सयस्त बटन निम्नछिसित होगा

$$f_{1}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^{2})^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_{1}-\mu}{\sigma^{-}}\right)^{2} + \left(\frac{x_{1}-\mu}{\sigma^{-}}\right)^{2} + \left(\frac{x_{2}-\mu}{\sigma^{-}}\right)^{2}\right]}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^{2})^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=1}^{n} (x_{j}-\mu)^{2} . \quad (129)$$

निराकरणीय परिकल्पना के अनुसार इनका सयुक्त वटन निम्नलिखित होगा ।

$$f_{\circ}(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu_{\circ})^n$$
 (12 10)

एक प्राह्म परीक्षण का पता चलाने के लिए हमें एक ऐसे अस्वीकृति क्षेत्र का पता चलाना है जिसके किए

क्योंकि निरावरणीय परिकल्पना के आधार पर हमें द्र-का वटन ज्ञात है, इसिलए हम है, की इस प्रकार चुन सक्ते हैं कि द्र-के उससे अधिक होने की प्राधिकता एक पूर्व निश्चित संस्था हो। उदाहरण के लिए यदि यह संस्था 005 हो तो हम जानते हैं कि N (0, 1) का 5% विन्दा 196 होता है

$$\therefore P\left[\frac{x-\mu_o}{\sigma} > 196 \mid \mu=\mu_o\right] = 005 \qquad (1212)$$

इसिनिए
$$k_1 = \mu_0 + 196 \sigma$$
 (12 13)

दुनी प्रकार यदि विकल्प $\mu < \mu_0$ हो तो अरबीकृति-क्षेत्र की परिभाषा का निम्नलिखित रूप होगा ।

$$\overline{x} < k_2 \tag{12 14}$$

इस प्रकार आप देखते हैं नि प्रसामान्य बटन में एक-तरफा विकल्पी के लिए जिस माच्य सबधी परीक्षण का साधारणतया उपयोग किया जाता है वह एक-समान अधिक-तम सामर्थ्यवान् है।

६ १२'१९ नीमन-पीयरसन के सिद्धान्तो की आलोचना

इस विवेचना के बाद हम उस निष्कय पर पहुँचते हैं कि एक अच्छे परीक्षण के लिए प्राह्मता तथा अनिवनतता के गुण जावस्यक हैं। यदि कोइ परीक्षण एक-समान अधिकतम सामध्येवाम् हो तो निष्कय ही वह सर्वोत्तम है। परतु बहुत ही कम परि-करपनाओं के लिए इस प्रकार के परीक्षण प्राप्त हैं। वनके असाव में निक्सी अप निक्कण को अपनाया जाता है। ये अप्य निक्ष दिनम् के प्राप्त हो स्वीध अपन कि अधनाया जाता है। ये अप्य निक्ष दिन तक्ष्मण और ततीयकाक नहीं हैं, और विभिन्न वैज्ञानिक विभिन्न निक्षण को अधिक युक्तिस्थय गान सकते हैं।

यह भी समय है कि विभिन्न अवस्थाओं में विभिन्न निकयों का प्रयोग उपयुक्त हो। प्रीफेसर रोनाल्ड एक फिजर इसी कारण नीमन-पीत्रसम के बिद्धात के कट आलोकक हैं। उनका कहना है कि यथिए कुछ विजोग परिस्थितियों में, जहाँ वैकल्किन परि-क्रमानां को प्रस्तुत करना समय है इन सिद्धातों का प्रयोग किया जा सकता है, परस्तु सामारण वैज्ञानिक खोज में बहुण हम विकल्यों से परिषित नहीं होते। ऐसी दया में सामम्म व्यवना हुसरे प्रकार की जूटि की प्राधिकता पर विचार करना समय नहीं है।

किसी ऐसी कहानी पर विश्वास करते हुए हम हिविकचाहट का अनुमव करते हैं जिसके सब होने की सभावना बहुत कम हो । साधारणतया इस प्रकार की कहानी सुनैनेवालो पर निम्निलिसित प्रमाल पट सकते हैं— (१) यह सब क्योल-क्लिय है।

(२) ऐसा प्रतीत होता है नि घटना वा वैज्ञानिक रीति से प्रेक्षण नहीं किया गया । घटना का कणन वास्त्रविकता स मित्र है ।

(३) कुछ बातें या तो बढा-चडा कर नहीं गयी हैं अथवा कुछ ऐसी घटनात्रा का बणन नहीं निया गया है जो मबिषत थीं और जिनतें इस कहानी की घटनात्रा को समझने में सहायता मिलनी ।

४) कोई अन्य पाक्ति अयवा कारण है जो हमारे बतमान ज्ञान की अवस्था

में हमें अज्ञात है।

सम प्रकार यदि किसी परिकल्पना को अस्वीकार किया जाता है ही यह आयग्यल नहीं है कि किसी विदाय वैकल्पिक परिकल्पना को स्वीकार किया जाय । और यदि हम किसी विदाय परिकल्पना को अस्वीकार कही करते तो इसका यह अर्थ नहीं है कि हम उस स्वीकार करते में तक यह है कि अप्रायिक पटना के घटने पर विदास करते में हिंक प्रायिक पटना के घटने पर विदास करते में हिंक विदास करते में हिंक प्रायिक पटना के घटने पर विदास करते में हिंक क्या प्रतिक्र होती है। परिकल्पनाओं की स्वीकार करते हैं है कि प्रायिक पटना के घटने पर विदास करते में हिंचिक वाहर होती है। परतु परिकल्पनाओं की स्वीकार करते में इस प्रमार का कोई तक उपलब्ध नहीं होता।

फिरार के अनुसार सारे विद्यात को इस पर बाचारित करना अस्बीइत-सौंव चुनने का एक गलन इंटिक्कीण है कि यदि इस विरोध समस्टि पर इन्ही परिस्मितवा में हजारा बार प्रयोग विया जाय हो केवल एक प्रतिश्वत अयदा पाँच प्रतिश्वत वा गलती होंगी 1 कोई भी वैज्ञानिक एक ही शार्षेक्ता-स्वर पर और एक ही समस्टि पर बार-बार प्रयोग नहीं करता। इसके अतिरिक्त प्रायिकता का परिकल प्राय ऐसी परिकल्पना पर आधारित होता है जिसकी अपूर्ण अस्वता पर किसी को विश्वास नहीं होता । उदाहरण के लिए जब हम इस परिलल्पना की जीक करते हैं कि समस्त महा होता । उदाहरण के लिए जब हम इस परिलल्पना को जीक करते हैं कि सहस प्रधानान्य के हो हो जाकर है कि यह स्वार्थन प्रधानान्य नहीं हो सक्ती 1 इस दशा में यदि हम बोना प्रकार की जुटिया से बचना चाहते हैं तो सबसे सरक उपाय तो यह होता कि परिलल्पना को विना परीक्षण के अस्वीकार कर देते । फिर भी हम परीक्षण करते हैं, नेगीकि हम बास्तव में यह जानान चाहते हैं कि प्रसामान्य बटन को समस्टि का प्रतिरूप (model) समझा जा सक्ता है या नहीं।

६ १२२० फिशर की विचारघारा

फिशर चार प्रकार की परिस्थितियों में भेद करता है।

६ १२ २०१ बेज के प्रमेय का उपयोग

पहली परिस्थिति वह है जब समिटि की पूर्वत बृहीत श्राधिकताएँ (a-priori

probabilitiet) जात हो। हम दबके एक उदाहरण से पहिले ही परिचित हैं (देखिए § दे देग)। हमें विभिन्न बतेंचों के चुनाव की पूत्रत पृहीत प्राध्यकताएँ ज्ञात थी। चुनी हुदे गीलियों के रग के जानने पर हमें विभिन्न वर्तनों के चुनाव की प्राध्यकताओं का परिकलन करना था। इस प्रतार की स्थिति में बेल के प्रयेष का उपयोग किया जाता है और प्रतिवर्धी प्राध्यकता का परिकलन निम्मलिखिल मूत्र से होता है—

$$P(A|B) = \frac{P(A) P(B|A)}{P(B)}$$
 (12 15)

इस प्रकार हमें विभिन्न परिकल्पनाओं को प्रापिकताओं का बान होता है और यदि कोई निल्यंस करना हो तो यह इस प्रापिकताओं के आधार पर किया जा सकता है। यदि किसी मैतानिक को प्रविच्य में निव्य जानेकारे प्रयोगों के बारे में कुछ तिक्क्स करना है तो उसके छिए इस प्रापिकताओं का ज्ञान ही यथेण्ट है यह पोपणा फरने की कोई आवस्पकता नहीं है हैक एक विशेष परिकल्पना संदय है या अस्तर ।

परन्तु दुर्माम्य से ऐसी परिस्थितियाँ बहुत कम होती है जब इस प्रकार के प्राप्तिकता सवधी विषरण दिये जा सकते हो ।

११२०२ प्रतिदर्श निरीक्षण योजना और नीमन-पीयरसन के सिद्धातो का ज्ञायोग

दूसरी परिस्थित वह है जिसका बीधोगिक प्रक्रियाओं में बहुया प्राद्भाव होता है। यदि प्रक्रिया नियन्ति है तो उससे होनेबाक उत्पादन के लक्षणों का एक वटन होंगा जिसे बहुत अपिक संख्या में प्रसापों द्वारा नामा जा सकता है। यह उत्पादन कारावानों में बाने कर में में करना हो या हवा नामा है कि कहा में सिकार है। यह समस्य यह नाममा है कि कि कि कि सि विद्यार हैं। में पृष्टिपूर्ण सर्मुखों को सख्या दवती अधिक तो नहीं है कि क्ष का कर हो दो है के बातार में जाने से काराबाने के नाम पर पच्चा लगने का बदर हो। विश्व इस जान से ही काम में कि उत्पाद की सिकार के बाता में बातों से रोकना प्रशेश। इस्के लिए डीर्ग्यों का निरोक्षण करना होगा। परसु निरोक्षण में बचा कराता है की प्रदि एक एक बस्तु को परमा जान का सह में हो हो स्थानी—नामार दुस्ती गईंगी कि उसको क्षरीहते को कोई तैयार हो नहीं। इस परिस्थित में एक प्रतिवर्ध-निरोक्षण योजना (sampling inspection plan) बनानी पदती है जिसमें नृष्टिपूर्ण उत्पादन के नामार में जाने की क्षरावना कम हो जान और छप भी अधिक न हों। इस वर्षा में निरोक्षक को बेटी के वाबार में भेनने के छिए स्वीहति या अस्विवर्धित देवा जानकर के निराक्षण के की सुद्धा पर पर्वित्र ही है।

इसी प्रकार यह देवने के लिए कि उत्पादन नियमण में है अयवा नहीं, उत्पादन होते समय ही वीच-बीच में से प्रतिदर्भ चूने जा सबते हैं। प्रतिदर्भ ने आधार पर यह निर्णय करना होता है कि उत्पादन रोककर मधीन को ठीक करना चाहिए या नहीं। ऐनीरियति में जिस समस्टिने बारे में परिकल्पना का परीक्षण ही रहा है वह बास्तव में वर्नमान है और जिस प्राचल पर विचार किया जा रहा है उसका मान मालूम करना कित मोले हो, परन्तु समस्व है। इस प्रकार की समस्वाओ को सुलक्षाने के लिए नीमन-पीयस्तन के सिक्षान्त विवोध उपयोगी हैं।

§ १२२०३ विश्वास्य युक्ति और पर्याप्त प्रतिदर्शन

तीसरी परिस्थिति वह है जो सबसे अधिक सामान्य है और वैज्ञानिक के लिए महत्वपूर्ण है। प्राय परिकरणना बहुत मुनिस्थित नहीं होती। बुख प्राचलों में लिए किया विभेष परास (range) के विसी भी मान को बारण करना इस परिकरणना के अनुसार समय होता है। उदाहरण के लिए अब हम कहते है कि समिष्ट प्रसामान्य है तो इस कथन से समिष्ट का पूरा विवस्ण नहीं मिलता। इस प्रसामान्य है तो इस कथन से समिष्ट का पूरा विवस्ण नहीं मिलता। इस प्रसामान्य वटन का — ०० से +०० तक कोई भी मास्य हो सहना है होर आसवन में किया की प्रसाम के लिए आसवन सीष्टब (goodnes of fit) के प्र*परिकरण से आप पहिल्हें ही परिवित्त हैं।

हम परीक्षण का भहाना भाग होता है अञ्चात आवको का प्रावक्तन करना 1 जब हम देनके सर्वोत्तम प्रावकनों का बान हो बाता है तो इस सम् कीर मूक परि-करना के सर्वोत्त से हमें समस्टि का एक पूरा विवरण प्राप्त हो जाता है। तब इस सपूर्ण विवरण की जांच की जाती है।

सर्वाप प्राक्तरून के सिद्धान्ता की विवेचना वभी तक नहीं की गयी, परन्तु यहीं यह बताना आदर्शक है कि कुछ प्राक्तरूक (estimators) है प्राप्त है कि तुछ प्राक्तरूक (estimators) है प्राप्त है कि दे ते हैं जो उनके आधारमूत बॉनडों से प्राप्त हो बारी है। यह उस प्रक्तरूप हो कि पार्ट के सार्व है। यदि इस प्रकार का है प्राप्त के का पहारा जिया जाता है जिसे कि प्रकार के हमें का सहारा जिया जाता है जिसे बिश्वस्वपूर्णित (fiduicial argument) पहते हैं। इस युक्ति के प्रयोग

प्रेक्षणो का वह फलन जिसके द्वारा क्सी प्राचल का प्राक्कलन किया जाता है, उस प्राचल का प्राक्कलक नहलाता है।

पर एक और प्रतिकृष है । वह यह कि प्रेक्षण सावधानी से लिये हुए इस प्रकार के भाग होने चाहिए कि उनको एक सतत वर के प्रेक्षित मान समझा जा सके और ऐसा समझने में कोई अर्थपूर्ण बृटि न हो ।

मान लीजिए, प्राचल 0 का इस प्रकार का एक प्राक्टकल $\hat{0}$ (मीटा-कल्या) है। यदि हमें $\hat{0}$ का बटन जात है तो हम इस प्रकार की एक सल्या \mathcal{C} मालून कर प्रकृति किल्के लिए $P[|\hat{0}-0| < G] = 0.95$

में अपार पर है का परिकलन विषया वा सकता है और ऊपर के समीकरण में केवल है है। अज्ञात है। इसिलए इस प्रायिकता-कपन (probability statement) की प्राप्त का प्रायिकता-सवधी कपन समझा जा सकता है। इस प्रकार है के जानने से हमें है का बदन मालूम हो सकता है। इस प्रायिकता बदन से यह निगंप जिया जा सकता है कि है का एक विचेप परिकल्पित मान समावी (probable) है अपना नही। इस दटन के पाँच प्रतिशत अपना एक प्रतिशत विदुत्रों का परिकलन किया जा सकता है। इनके आधार पर एक अस्तीकृत क्षेत्र का भी निर्माण किया जा सकता है। इनके आधार पर एक अस्तीकृत क्षेत्र का भी निर्माण किया जा सकता है।

यदि पूर्वेत गृहीत बटन अज्ञात हो तो प्राचन की प्रतिच्छा (status) भी एक बज्ञात (nuknown) पानि की जैसी होती है। एक पर्योत्त श्रतिष्ठग्रेस (sufficent statistic) के प्रेमण से प्राचल गूर्यतमा ज्ञात तो नही होता, तरन्तु निवान काता भी नहीं पहता, वर्गोस इस प्रतिवर्धन से हमें प्राचल का कुछ तो ज्ञान हो ही जाता है। इस जान को प्रकृति प्राधिकता मनवी होनी है इसलिए प्राचल की प्रतिच्छा अज्ञात से हटकर पार्युल्डम चर की हो जाती है।

§ १२२०४ सभाविता फलन और उसका उपयोग

एक और परिस्थित पर फिदार ने विचार किया है । यदि कोई पर्याप्त प्रतिदर्शन विवासन नहीं हो और प्राचल ना अवकादा वरातत है तो अगर के तर्न से काम नहीं चल सकता। विभिन्न प्राचलको पर विचार करने से हमें प्राचल के विभिन्न बटन सिली और जब तक हमारे पास तर्क-सेनव निज्य (cnicrian) का बमान है तत तक हमरें से किसी विदोध बटन का जपयोग करना और उसके आधार पर परिकल्पना को सब्सोक्तर करना असमत होगा। इस अवल्या में कियर के अनुनार हमें प्राधिकता को छोड़ कर लगाने पर सिल्क्य के साथ पर परिकल्पना को सब्दोक्तर करना असमत होगा। इस अवल्या में कियर के अनुनार हमें प्राधिकता को छोड़ कर लगाने जसी के समान एक अन्य धारणा कर आव्या केना होगा जिसे हम घटना की सोमाबिसा (likelbood) को सबा देंगे।

सभाविता प्राचल का एक फलन होता है। असतत बटनो के लिए इसका मान प्रेक्षित घटना की प्रापिकता के बराबर होता है। सतत बटनो के लिए—जहाँ किसी भी विशेष घटना की प्रापिकता भून्य होती है—इसका मान प्रेक्षित घटना के प्रापिकता -- धनत के बराबर होता है। यह सभाविता प्राचल के किसी विरोध मान के लिए महत्तम होती है। जिन प्राचलों के लिए सभाविता फलन का मान महत्तम सभाविता की सलना में बहत कम होता है उन्हें सर्वेदननक समझा जा सकता है।

मान लीजिए, हम एक सिक्के को 25 बार उछालते हैं जिसमें वह 20 बार पट गिरता है । इस आधार पर हम इस परिकल्पना की जांच करना चाहते हैं कि फिक्के के पट गिरते की प्रायिकता है हैं । अभी तक हमने इसके जांचने की शिव्य विधि पर सिधार किया है उसमें हम परिकल्पना के आधार पर 20 या इससे सी अधिक बार पट आने की प्रायिकता का कल्क करते हैं । यदि यह 25 प्रतिश्वत से कम हो तो हम परिकल्पना को अस्थीकार करते हैं (क्योंकि यहां हम दो-लरका परीक्षण का उपमीण कर रहे हैं)। इस परिकण-प्रचाली की कई बार इस कारण आलोचना की गयी हैं कि तक और पुनित में प्रीक्षण प्रचाली की कई बार इस कारण आलोचना की गयी हैं उपयोग नती करता चाहिए ।

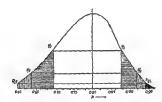
अच्छा यह होता कि प्रायिकता p के विभिन्न सभव मानो की नुजना प्रेक्षित बार-बारता के आघार पर की जाती । यदि पट गिरने की वास्तविक प्रायिकता p होती तो प्रेक्षित घटना की प्रायिकता, यदि कम को भी व्यान में रखा जाता, $p^{-0}(1-p)^5$ होती ।

इस उदाहरण में सभाविता $p=rac{20}{25}$ के लिए महत्तम हो जाती है । p के

क्सि मी मान के लिए इस समानिता को महत्तम समानिता के भिन्न (fraction) के रूप में रखा जा सकता है। इस उदाहरण में यह भिन्न निम्नलिखित हैं—

$$\left(\frac{p}{20/25}\right)^{20} \left(\frac{1-p}{5/25}\right)^5 = \left(\frac{p}{20}\right)^{20} \left(\frac{1-p}{5}\right)^5 \left(25\right)^{25}$$

हमें ज्या परिकल्पमा को अस्वीकार करते हुए खबसे कम हिनकिनाहट होगी।
जिसके लिए समामिता सबसे कम है और सबसे अधिक मजाबिता वाली परिकरणवा
को अस्वीकार करने में सबसे अधिक हिनकिनाहट होगी। बिट ऊपर के समामितापिस तबा प्राचक के नु सबस को दिवाली हुए एक प्राप्त सोचा ज्या तो यह स्पष्ट हो
जिसकी कर प्रेस कैपनी साम कि कि स्वीवताएँ महत्तम समामिता से
जुमान के योग्य है और किन सीमाओं के बाहर समामिता हतनी कम हो जाति है कि
जुमानों सामक मान सर्व-सामाओं के बाहर समामिता हतनी कम हो जाति है कि
जुमानों मानक मान सर्व-सामाओं के बाहर समामिता हतनी कम हो जाति है कि



चित्र ३३-- २५ में से २० बार सफलता के लिए p का संमाधिता फलन

चित्र में p के परात को चार भाषों में बादा पत्ता है। (1) वहाँ सभावितानिक $\frac{1}{2}$ से सर्वित हैं. (2) वहाँ पत्त है से का परन्तु है से स्वित्व हैं. (3) वहाँ यह के स्व परन्तु $\frac{1}{2}$ से स्वित्व हैं. और (4) वहाँ यह $\frac{1}{3}$ से भी कम है। अदिस माग में प्राप्त के मान एण्टराया सहेत्यक्षक है। इस अकर p के परास को स्वीकृति और अपनीकृति के से में से सिंदर जा सकता है। पर्याज प्राप्तकक (estimator) के अपास में प्राप्त के सिंदर जा सकता है। पर्याज प्राप्तकक (estimator) के अपास में प्राप्त के सिंदर का सिंदर के सिंदर के सिंदर का सकता है। पर्याज प्राप्त के सिंदर वह सिंदर के स

६ १२ २० ५ वैज्ञानिक अध्ययन और स्वीकृति प्रणाली में अंतर

फिरार के मतानुसार वैज्ञानिक अध्ययन में परिकल्पना परोक्षण-अनुभव से सीखने और अपनी राय बदलने का एव साधन है । विज्ञान में राय कभी प्रतिम नहीं होती तथा अधिक अनुभव होने पर वैज्ञानिक अपनी राय बदलने के लिए हमेशा स्वतन पहता है । इस प्रकार परिकल्पनाओं को न तो सबा के लिए स्वीकार किया जाता है और न अस्वोकार ! स्वीवृति प्रणाणी (acceptance procedure) इस दृष्टिकोण से परिकल्पना-परोक्षण से भिन्न है । स्वीवृति प्रणाणी में वर्तमान की एक विज्ञों सत्तस्या पर कार्य करने लिए तिक्चय करना होता है जिसको वदनना सभन नहीं है। एक कारखाने के मालिक को यह तय करना होता है जिसको वदनना सभन नहीं है। एक कारखाने के मालिक को यह तय करना दाता है कि वह निस्ती विषये प्रकार का माल खरोदे अथवा नहीं । हो सकता है उसे वाद में अपनी गतती महत्त्व हो, परन्तु यह उस कच्चे माल को खरीदने और उद्यक्त उपयोग करने के बाद ही सभव है जिसके लिए स्वीकृति प्रणाणी का प्रयोग किया जाता है। यह प्रणाणी उस ही सजा में सगत है जब लगभग एक ही प्रकार के कच्चे माल पर बार-बार इसका प्रयोग किया जाय। इस प्रणाली में आई का विशेष प्यान रखना परवा है । तिरीक्षण का वर्षा उपयोग करने के वाद साम स्वाप स्वाप से अधिक नहीं होना चाहिए वो बिना निरीक्षण किये हुए माल को खरीदने में उठारा जाता है। स्वाप करी हरी हम प्रणाण निर्म करी हमा से उठारा जाता है। स्वाप करी हमा करी करी हम प्रचार करी हमा साम करी हमा साम से अधिक नहीं होना चाहिए वो बिना निरीक्षण किये हुए माल को खरीदने में उठारा जाता है। स्वाप जाता है।

परन्तु बैज्ञानिक गलत निर्णय से होनेवाले नुकसान को नहीं आँक सकता । बैज्ञानिकों की हैस्तियत से हम अनुमान लगाने की ऐसी पद्धति का उपयोग करना माहते हैं जो सभी स्वतन रूप से विचार करनेवालों से लिए युक्तियात हों। इसका विचार हमारे सामने नहीं रहता कि इस अनुमान द्वारा प्राप्त क्षान का उपयोग क्सि प्रकार प्रोपा।

इस प्रकार आप देलते हैं कि नीमन-नीयरसन तथा फिश्चर के विचारों में भेद हैं और सास्त्रज में वे एक दूसरे के कुट आलोचक हैं । सीमाययदा विचारपाराओं के जिए सोनते हुए भी कई समस्याओं के लिए दोनों के हल समान हैं । फिर भी हमेंचा ऐसा नहीं होता कि जिस परिकल्पना को नीमन-मीयरसन के परोक्षण द्वारा अस्तीकार क्लिया जाय वह समाचिता के उपयोग अमया प्राचक के विकासस-बटन (fiducal distribution) के प्रयोग सी बस्तीकृत हो। आप इनये से किसी के भी तर्क से सहस्ता होने के लिए स्वनन हैं, बल्कि यह भी हो सकता है कि आप को दोनों ही तस्तों में जुटि दृष्टिगोंचर हो। अब हम परिकल्पना-परीक्षण के साधारण सिद्धा तो की विज्ञान यही समाप्त करते हैं।

भाग ३

सा ह च र्य

समाश्रयण श्रीर सहसम्बन्ध

Association
Regression and Correlation

अध्याय १३

साहचर्ष (Association)

६ १३१ परिचय

परिकल्पना-परीक्षण के सबस में हम कुछ ऐसे उदाहरणों से परिचय प्राप्त कर चुके हैं जिनमें प्रयोग का उदेश्य यह जानमा था कि हो विश्वमत गुणों में कोई सबस है या नहीं। इन परीकाणों में समर्पिट को एन kxr सारणी से विभाजित करके खाला जात है जहीं एक गुण के जिलार से समर्पिट के k मार्ग हैं जीर दूसरे गुण के विज्ञार से समर्पिट के k मार्ग हैं जीर दूसरे गुण के विज्ञार से एं इस सारणों में दोनों गूणों के स्वत्य होने भी परिकल्पना के वाचार पर विश्वमत सारों में प्रव्यानित सारवारता का परिकल्पन किया जाता है और x² परिकल्प होरा इन प्रव्यानित सारवारता का परिकल्पन किया जाता है और x² परिकल्प होरा इन प्रव्यानित सारवारताओं और प्रेसित बारवारताओं के अन्वर की सार्थकता की विज्ञा जाता है।

इस परीलाण के अन्त में बांदि x²-का ग्रेसित मान x² (6-1)(r-1) के एक पूर्व गिविचत प्रतिसात बिंतु से अधिक हो तो इस गिराफरणीय परिकल्पना का अस्वीकार कर देते हु और इस गिज्या पर पर्युक्त है कि ये तो गुण स्वतात नहीं है। अब प्रवर पर उठता है कि बांदि में स्वतात नहीं है वो इनके त्यवय को क्ति प्रवरार सनसा जा सकता है। बांदि एक गुण में परिवर्तन होने पर दूसरे गुण में भी एक विशेष दिशा में परि-वर्तन होने की प्रामिकता बढ़ जाय तो हम कहते हैं कि इन दोनो गुणों में साहबर्ष (association) है।

§ १३ २ साहचर्य की व्याख्या

पूजो में साहुजां होने का क्या यह जब है कि एक पुण दुषरे के साय कारण और फार्स (cause and effect) ने प्लब में जबीयत है ने जब हत जीयत के सेवन और पीत से पूजित जाने में साहक और पीत से मुनित जाने में साहक बीर रीग से मुनित जाने में साहक्यें बताते हैं तो हमारा यही विचार होता है कि जीयत के प्रमान के रोगी बज्जे हों जो ही मार है हम साजीतों की और उन पर करों हम हम की की आप के अपने कर कर करों हम से साहक्यें मारी है तो हमारा यही विकास होता

हैं कि अनुक मशीन अधिक अच्छी है और अमुक मशीन में कुछ क्षेप है। यदि मशीन में दोप न होता तो इतनी त्रुटियाँ उससे बनी हुई बस्तुओं में नही पायी जाती। हो सकता है कि हमारा इस प्रकार एक गुण को दूसरे का कारण समझना ठीक हो और यह भी हो सकता है कि यह हमारी तृष्य हो।

उदाहरण के लिए यदि हम यह देखने हैं कि किसी विशेष रोग में ऐनोपैषिक इलाज करदाने वाले रोगियों में नीरोप होने वालो का अनुपात अधिक है और वैयक इलाज करदाने वाले में कम, तो इसकी निम्नलिवित प्रकार की अनेक व्याख्याएँ की जा सकनी हैं—

- (१) इस रोग के लिए ऐलोपैयिक इलाज अधिक लामदायक है।
- (२) केवल सयोग से हमें ऐसे प्रेक्षण मिले हैं।
- (३) ऐंटोनेथिक इलाज करवाने बाले एक विशेष खेणी के लोग है जो बैंडक इलाज करवाने बालो की अपेक्षा अधिक धनवान् हैं और इस इलाज के अविदिश्त वे अधिक शनितवर्धक भोजन भी करते हैं। यही उनके स्वास्थ्य के रहस्य की कुजी हैं।
- (४) रीय से मुलित पाने के लिए वैद्य अपना जानटर पर विश्वास होना आवस्पक है । जिन लोगों ने वैद्यक इलाज करवाया उनमें से बहुतों को इस पर विश्वास म था। क्योंकि उनके पास ऐलोपेथिक इलाज के लिए ऐसे नहीं थे इसलिए उन्हें म-ब्यूर न येवक का आध्य छेना वडा। उनके स्वास्थ्य-लाभ न होने का कारण यह जविश्वास ही था।

ऐसी ही अन्य भी जनेक प्रकार की व्याख्याएँ प्रेसित सारणी के लिए थी जा सकती हैं । परन्तु यह स्पष्ट हैं कि पहली व्याख्या के पक्ष में निर्वाय देने से पहले हमें कम से कम नीसरी व्याख्या की जीच अवस्थ कर लेनी चाहिए ।

हसी प्रकार यद्यांप विभिन्न मधीनों पर बनी बस्तुओं में बूटिसब्बा भिन्न-भिन्न हो सक्ती है, परलु इनका कारण मधीनों में बन्तर नहीं वस्तु उन मजदूरों में अतर हो सक्ता है जो इन पर काम करते हैं। इसी कारण प्रयोग की अभिकल्पना (design of experiments) के बच्चाय में हम देखेंगे कि मसीनों में अन्तर के निकार पर पहुँचने के पूर्व हमें बन्य कारणों के प्रवाद के सुनित पा लेना आवश्यक है। इसीलिए केंद्रिन वर्ग (Laim Square) बादि बनेके अभिकल्पनाओं (designs) का व्यविष्कार हुआ है। परन्तु कई स्थितियों ऐसी होती हैं जहीं हम प्रयोग नहीं कर सकते, केवल समस्टि से एक प्रतिदार लेकर उस पर प्रेक्षण

सारणी सख्या 131

			9	ता की	आंस व	ा रग	
			भाली	भूरी	नीकी	हरी	कुछ
			(I)	(2)	(3)	_(4)	
	ৰা ণী	(1)	117	18	15	0	150
11 रम	भूरी ((2)	55	180	15	0	250
औत बारग	नीली ।	(3)	0	12	60	3	75
विता यी ः	हरी	(4)	0	0	1	24	25
_	बुल		172	210	91	27	500

हम इस सारणी ढारा पुता की आंखा के रण और उनके पिताजों की लाँखों के रण कि सहक्वें का साथ आंक्ष्म करना काइत है। पुत से विज्ञास्त करने घर उनके पिता की आंखा का ररा मारूस हो सकता है परतु पिता से पुक्र र हम हिम्मी होने वाल पुत की आंखा का ररा नहीं आंक्ष्म कर सकते हैं। लिका पिता की अंखा के रस के जान के आधार पर हम इसका अनुमान कर सकते हैं। पिता और पुत्र की आंखा के रसों में जितता प्रपाठ सहस्व है होगा उनना ही अधिक कुंच इस अनुमान पर विश्वास होगा । इस उपहरण में साहचे से होगा उनना ही अधिक कुंच इस अनुमान पर विश्वास होगा । इस उपहरण में साहचे से साम पुत्र हमा उद्देश्य के बार में अनुमात लगा सा की लगा राजानकर किता विश्वास के साम पुत्र की आंखा के रसों में अनुमात लगा सा सा उनना है।

यदि हम पिता की आंत का रण जाने विना यह अनुभान छगायें तो स्वामानिक है कि हम वह रण वतायेंगे जो सबसे अधिक पुत्रों में पाया जाता है। इस विशेष समिद्ध के लिए यह रण मूरा है। परतु भुल पुत्रों में वेवल 200 42% की आंत का यह रण है इसिलए हमारे अनुमान के यलत होने की प्रायिकता 38% प्रतिशत है। प्रश्त उठता है कि पिता की आंत का रण जानने से यह प्रायिकता विश्वी कम हो जायगी।

पिता की आँख का रस भात होने पर पुत्र की आँस ने रस का क्या अनुभान स्माना चाहिए ? मस्मी की प्राधिकता की न्यूनतम करने के लिए यह स्वामाविक है कि जिस प्त की अलिवाकी की सरका उन सव पुत्रों से अधिकतम हो, विनके पिता को आंख का यह सतर-पा है हम उची रच का अनुसान कमाने । जिल पुत्रों के पिता को आंख का रंग भूस से सबसे अधिक सरका भूसे औरवाकों की है। इसिंग्रिए पनि हमें सुप्त दें तो हम पुत्र के बारे में भूरी आंख होने ही का अनुसान क्षायेंगे। यह अनुसान $\frac{180}{250} = 72\%$ वार सत्य होमा। इसी नियम के अनुसान क्षायेंगे। यह अनुसान क्षायर पर पुत्र को आंख के राग के आधार पर पुत्र को आंख के राग का अनुसान करने हें गजतों की माधिकता नीवी आंख के लिए $\frac{75-60}{1000} = 20\%$ तथा का औरवा को आंख

के किए 150-117 = 22% और हरी बांस के निए केवल $\frac{25-24}{25} = 1\%$ है। बांस स्व पूजी पर सम्मिक्त विचार करें तो उन सब पूजी सार का जिल्ली और के रण का अनुसाम विद्या की आंख के रण के अनुसाम विद्या की आंख के रण के अनुसाम विद्या की आंख के रण के अनुसाम पर सही छापा। जायगा। 117-1180-50-24=381 होगी। उस प्रकार गलती की कुल प्राधिकता $\frac{500-381}{25} = 23.8\%$ होगी।

ऊपर की तरह की सारकी में पितत के जान से स्ताभ के अनुमान की नक्षती की प्राधिक करा में जो आपेक्षिक कभी हो जाती है उसे $g_{r,s}$ से सूचित किया जाता है । इस उदाइरण की सारणी के किए

हत सकेत में ? से हम उस चर को सूचित करते है जिसके अनुसार परितयों (rows) का विभाजन जिला गया है और ८ वह चर है जिसके अनुसार स्त्रों (columns) को विभाजित किया गया है।

इस के विचरतित यदि हम पिता को जाँख से पुत्र की आंख के राग का जनुमान कपारों के स्थान पर पुत्र की जाँको के रास से यह अनुमान कपार्थों कि पिता की आंख का राग क्या रहा होगा तो इसमें उत्तम का स्थान प्रयम और पत्ति का स्थान कितीय होगा यानी इसमें के दिने हुए होने पर हमपारित का अनुमान कपार्थों । इसके किए जीवत साहसर्थ-मुक्क (index of association) हुन है।

$$g_{er} = \frac{50.0 - 23.8}{50}$$

$$= 0.5240$$

$$g = \frac{342 + 262}{580 + 500}$$
$$= \frac{604}{1080}$$

मान लौजिए कि दो गुण शिक्षा और बेतन हैं। नीचे सरकारी कमैचारियों को उनकी शिक्षा और बेतन के अनुसार एक कमबद्ध 5×4 सारणी में विभाजित निया हुआ है।

सारणी सख्या 132 सरकारी कर्मचारियो का शिक्षा और वेतन के कम के अनुसार वर्गीकरण

	मतन ≈	x<100	100 ≥ #<300	300 € x < 500	500 € 4	कुल
दिशा	शिक्षा 🏏 📉	(1)	(2)	(3)	(4)	!
中	अपड (1	08	05	00	_ 00	_13_
a de	हाई-स्कूल (2)	11	14	03	00	28
	इटर मीडिएट (3)	12	23	04	00_	39
4	प्रजुएट (4)	_ 07	104	35	16	162
	पोस्ट ग्रे मुएट (5)	00	02	17	10	29
	कुल ।	38	8	59	26	271

इस सारणी के लिए

$$g_{re} = \frac{\frac{271 - 148}{271} - \frac{271 - (8 + 14 + 23 + 104 + 17)}{271}}{\frac{271 - 148}{271}}$$

इसी प्रकार

$$g_{c,r} = \frac{(12+104+35+16)-162}{(271-162)}$$

$$\therefore g = \frac{((k+14+23+104+77)-148+((12+104+35+16)-162)}{(271-148)+(271-162)}$$

$$= \frac{23}{232}$$

६ १३.४ क्रमिक-साहचर्य का सूचकाक (mdex of order association)

हम भाष हु में एक कभी है। यदि बास्तिविक तमस्याह पाँच साँ वपयों से अधिक हैं और हम यह जनुस्तान कर कि कह से स्थान में है तो दों हम यह जनुस्तान कर कि कह से स्थान में है तो दों ने हों व जनुस्तान कर कि दियों ने से उपये और पांच आे हम से में में में में है तो दोंगों ही जनुस्तान की चुंडियों के हि तो पांच में व दावर का दर्जी दिया गया है। इसी प्रकार इस याप में बेतन जातने पर हम विका के विकार से जाई अपक कर्षचारों के शिख्य-वेयुष्ट होने का अनुस्तान जगाम, माहे उसके हाई स्कूट पांच होने का —्यन दीनों अनुस्तान की चुंडियों में मेंद मही किया जाता। यदि दीनों चर इस प्रकार के हो कि जनकी किसी तके-स्थान क्रम में रखा जाता। यदि दीनों चर इस प्रकार के हो कि जनकी किसी तके-स्थान क्रम में रखा जाती। यदि दीनों चर स्थान प्रकार के हो कि जनकी किसी तके-स्थान क्रम में रखा जाती में सि हो हो हो हो हो हो हो हम भूगों की वरावर समसत्ता उचित

इंच प्रकार का एक गाए h है जिसे हम क्षिक-साहचर्य पा चुनवाक (undex of order association) कहते हैं। यदि हम इन 291 कर्मचारियों में हे दो को यादिष्यक्रीकरण द्वारा चुन के तो लिएक विवासाय क्रमेंचारियों में हे दो को यादिष्यक्रीकरण द्वारा चुन के तो लिएक विवासाय क्रमेंचारी के लिए क्षिक वेदन होंने की प्राधिकता के विवास है है हम माप के लिए हम्पिक प्रवास हों के तो आधिकता के विवास है है हम माप के लिए हम प्रेमें प्रकारी पर विवास हमें करते जिनमें दोनों कर्मचारी वेतन अधवा शिक्षा के विचार से एक ही श्रीभी में रहते जा शकें।

९१३५ अभिक-साहचर्य के सूचकाक का कलन

इस साप को प्राप्त करने के निम्निक्षित विभिन्न चरण है

 हर एक साने की बारबारता की उन सब बारबारताओं के योग से गुणा किए जी उसके नीचे और दाहिने हाथ की ओर हो अर्थात् जिनमें X तथा Y दोनों का मान अपेक्षापृत्त बडा हो। ज्वाहरण वे छिए पिछळी सारणी में 23 का (35+16+ 17+10) = 78 से गुणा किया जायका और 3 का (16+10)=26 से । ब्रतिम पनित और असिम स्तम की बारवारताओं को विसी भी सरया से गुणा नहीं किया जाता।

(2) इन गुणमफळो दा योग करिए। इस योग को यदि S से सूचित दिया जाय सो सारणी के छिए

$$S = (8 \times 228) + (5 \times 85) + (11 \times 211) + (14 \times 82) + (3 \times 26) + (12 \times 184) + (23 \times 78) + (4 \times 26) + (7 \times 29) + (104 \times 27) + 35 \times 10) = 13.261$$

- (3) प्रत्येक साने की वारावारता को उन सब बारवारताओं से गुणा कीनिए जो उसके नीचे और वाणी ओर हैं अर्थान् किन्में Y अपेक्षाकृत वडा हो किन्तु X अपेक्षा-कृत छोटा हो।
- (4) इस प्रकार के गुणमफलों का योग करके उसको D से सूचित करिए।
 पिछली सारणी में

$$D = (5\times30)+(14\times19)+(23\times7) +(3\times148)+(4\times113)+(35\times2) +(16\times19) = 1,847$$

(s) h का परिकलन निम्नलिखित सूत्र से कीजिए

$$h = \frac{S - D}{S + D}$$

पिछली सारणी में

$$h = \frac{13,263 - 1,847}{13,263 + 1,847}$$
$$= \frac{11,416}{15,110}$$

क्योंकि इस प्रकार के परिकलन में चूटि होने की समावना है, दशलिए एक दूसरी प्रकार से इस परिकलन को करके दोनो परिकलनो के फल का मिलान किया जा सकता है। इसके लिए निम्नलिखित चरण हैं। (व) सब पित्र-योगो और रतभ-योगो के वर्गो के योग का परिकलन कीजिए और इहमें ते खानो के वर्ग-योग को घटा दीजिए। यदि इस फल को ० से सुनित किया जाय तो पिछली सारणी के लिए

या जाप तो स्पष्ठका वारणा क 1000
$$\rho = [(13)^2 + (28)^2 + (39)^2 + (162)^2 + (29)^2 + (15)^2 + (29)^2$$

अब 2(S+D)+ क = 30,220+43,221 = 73,441

और $t^p = 73.441$ इसिंग्य हुन स्विकाल है कि h का परिकलन सही हुआ है 1h का मान—t से लेकर +x कत हो सकता है। यदि यह ऋषास्क है तो इसका अपे यह है कि D>S अपीत् पि को ही भो से कर्म नार्री कि जार्री और उनका का दोनी चरों (x,y) के अनुसार मालूम किया जाय ती जिस कर्म नार्री के िएए एक चर का मान अधिक होगा उसमें इसरे कर या मान कम होने की आधा की वाली है। इसी प्रकार यदि h का मान चनत्मक है तो इसका अपे यह है कि S>D अर्थात् जिस कर्म नार्री के िएए एक चर का मान अधिक होगा उसमें इसरे चर का मान भी अधिक होने की आधा की जाती है। यदि h मान प्रतासक के लिए एक चर का मान भी अधिक होने की आधा की जाती है। h सिंग्री के h मान प्रतासक के लिए एक चर का मान भी अधिक होने की आधा की जाती है। h सिंग्री h मान प्रतासक के लिए एक चर का मान भी अधिक होने की आधा की जाती है। h सिंग्री h मान भी h मान भी

\$ १३'६ जगर के विधे हुए सापो का प्रयोग समस्य और प्रतिस्त्रों दोनों के लिए चिया जा सकता है। बहुबा समस्य के लिए इस प्रकार का माण मालूम करना कठिन होता है बौर हम प्रतिदर्श से ही इस माण का प्रावकलन (estimation) करते हैं।

मई बार हमारा यह विचार हो सकता है कि एक बर दूसरे से इस प्रकार सबधित है जैसे कि कार्य बोर कारण ! यदि कारण पर नियत्रण रखा जाय तो कार्य भी नियत्रित में गलती की बहुत सभावना है। पहिले तो हमें यह विश्वास होना चाहिए कि प्रतिदर्श यादिन्छिकीकरण द्वारा चुना गमा है। दूसरे यह घ्यान रखना चाहिए कि साहचयं-सूचक का प्रेक्षित मान केवल प्रतिदर्श-बुटि के कारण तो सभव नहीं है। हमें यह भी पता होना चाहिए कि कोई तीसरा चर तो ऐसा नही है जो इन दोनो चरो को प्रभावित करता है। ऐसी दशा में इन दो चरा के साहधर्य का कारण यह तीसरा धरही हो सकता है। ऐसे अनेक उदाहरण है जिनमें नौसिलिये सास्थिक हास्यास्थद निष्कर्पो पर पहुँच जाते हैं क्योंकि दे ऊपर दी हुई बातों का घ्यान नहीं रखते । साहबर्य के मापों का परि-कलन बहुत सरल है जिसे कोई भी स्कूल का विद्यार्थी सरलता से कर सकता है। परतु

इस माप के आधार पर किसी युक्ति-युक्त निष्कर्ण पर पहुँचना बहुत सूझ-बूझ का काम है। यह सूझ-बूझ पुस्तको द्वारा नहीं आ सकती वरन् केवल अनुभव और दूसरे सास्यिको की आलोचना से ही पायी जा सकती है।

/शेंघ्याय १४

सह-सम्बन्ध (Correlation)

१ १४१ परिचय

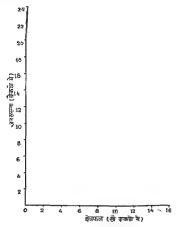
x² परीक्षण और साहचय के सबस में हम डिचर (bivariate) से परि-चम प्राप्त कर चुके हैं। साहचय के लिए हमने एसे चरो पर विवार पिया था जिनको मापा नहीं जा सकता था—अधिक-सै-अधिक किसी पुत्ति-स्वत कम में एसा या सकता था। परमु आप जानते हैं कि कर चर ऐस होते हैं कि उनको मापा जा सकता है। इस प्रकार के चरो के बीच साहचय के लिए एक इसरे ही प्रकार के माप का उपयोग किया जाता है। इस माप को सह-सबय-गुणाक (Correlation coefficient) कहते हैं।

सारणी सख्या 141

ग्राम	ধ্বস্থ-	জন-	ग्राम	ধ্যস-	জন-
संख्या	फल	संख्या	सस्या	फुल	सस्या
1	201	yı .	1	x_i	y. 1
(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
1	_ 3_	8	9	5	10
2	4	5	10	5	I
3	6	10	II	10	7
4	5	5	12	8	3
_5	11	6	13	4	2
6	15	20	14	4	10
7	15	10	15	6	6
8	11	5	16	4	6

§ १४२ सह-सबध सारणी

कपर की धारणी में सोलह गाँवो की जनसस्या सैकडो में और क्षेत्रकल सो एकडो में दिये हुए हैं। यह एक सह-सबध सारणी का सबसे सरल उदाहरण है जिसमें प्रत्येष इकाई के लिए दोनो चरो (x,y) के मान दिये हुए हैं। इन मानो को किसी विशेष कम में रखने की आवश्यकता नहीं है।



चित्र ३४--सारणी सख्या 14 1 के लिए प्रकीर्थ-चित्र

६ १४३ घनात्मक व ऋणात्मक सहसबध

हम यह जानना चाहेंगे कि जब एक चर घटता या बढता है तो दूसरा चर औसतन किस प्रकार विचलित होता है।

(1) यदि दोनो चरो X और Y के मान साथ-साथ बढते हैं तो हम कहते हैं कि X और Y के बीच घनात्मक (positive) सहसवध है। (2) यदि Xके बढ़ने के साथ Y घटता है और Xके घटने के साथ Y बढ़ता है तो हम कहते है कि X और Y का सह-सबध ऋणात्मक (negative) है।

यह आवरयक नहीं है कि जब X बढ़े तो Y या तो बड़े ही या घटे ही। उनर की सारणी में X के बढ़ने पर कभी तो Y घटता है और नभी बढ़ता है। जब हम कहते हैं कि X और Y के दोन का सहसवध धनात्मक है तो हमारा तात्म्य केवल यह है कि साधारणत्या X और Y साथ-साथ बढ़ते हैं।

इसके पहिले कि हम सहसवय-गृथाक का परिकलन करें हमें कुछ साधारण चिद्यातों का ध्यान रखना आवश्यक है। (1) यह निश्चय होना चाहिए कि इन दो चरों में कुछ सबच होना न केवल समब है वित्क इस बात की जाशा भी की जानी है। (2) प्रविद्वें पह नहीं मालून कि कौन-माणितीय बटनसप्टिट का अवशा प्रतिनिधित्व कर सकता है तो हमें केवल इस एक सच्या — सहस्वय गृणाक—से उतनी सुचना नहीं मिल सकती जितनों कि उस सारणों से जो इस परिकलन के लिए तैयार की जाती है।

(3) प्रगाढ सह-सबघ का अर्थ यह नहीं होता कि एक चर दूसरे के विचलन का कारण है।

६ १४४ प्रकीर्ण चित्र (Scatter diagram)

यदि हम एक प्राक पेपर में भूज (abscissa) पर श्रवीर कोटि (ordinate) पर प्र को स्विता करें तो श्रवीर प्र के प्रत्येक युव्म (pair) के लिए हमें एक बिंदु प्राप्त होता। इस प्रकार सारणी अथवा त्यास (data) का लेखाचित्र पर बिंदुओं हासा होता। इस प्रकार सारणी अथवा त्यास (data) का लेखाचित्र पर बिंदुओं हासा तिल्यण किया जा सकता है। इस तरह हमें जो वित्र प्राप्त होते हैं में उसे प्रकारण कित कहते हैं। उसहिएन के लिए सारणी संस्था 14.1 के त्यास का प्रतिनिधित्य चित्र संस्था 34 में दिया हुआ है। इस चित्र के हारा हमें सहसवय का माप नहीं मालूम हो सकता। यदि सारणी में दो या अधिक युग्म विल्डुक समान हो तो उनकी बारवारों के हमें दस चित्र से पता नहीं चल्ठ सकता वस्त्रों के येद्व सर्पतित हो जारों और उनका पृथक करना स्वस्त्र होगा। त्यास द्वारा प्राप्त मुन्ता की प्रकीण-वित्र में मूत्र रूप में रखने के लिए निम्मिलिबत तरीवा काम में लाम जाता है।

१४५ समाश्रयण-वक्र

X के प्रत्येक प्रेसित मान के लिए उससे सबधित Y के मानो के माध्य को इस प्रकीर्ण-चित्र पर एक बिंदु द्वारा सूचित किया जाता है। यदि न्यास एक बहुत बडे प्रतिदर्श से लिया गया हो तो इन माध्य बिंदुओं को मिळानेवाली रेखा लगभग एक सतत

अयवा

वक (smooth curve) होती है। इस वक को समाव्यय-वक (regression curve) वहते हैं।

इसी प्रकार Y के हर प्रेशित यान के लिए X के माध्यों को मिलाने वाली रेखा एक दूसरा समाध्यण-वक बनाती है। सबसे सावारण स्विति में ये वक सरल रेखाएँ होते हैं और ऐसा समाध्यण एक-वातक (Imear) कहा जाता है। आमें हम अधिकतर एक-पातक समाध्यण का ही अध्ययन करेंगे। कार के प्रकीण वित्र में इतने कम बिंदु है कि प्ररेक X के मान के लिए Y का माध्य मालूम करना और एक सतत वक का पता चलाना ध्यवें होगा। इसिल् केवल अनुमान से दो सरल रेखाएँ इस प्रकार तीची हुई है कि विद्यों से उनकी दूरी अधिक न हो।

इन दो समायवण रेखाओं के खीचने के बाद समाथवण गुणाक का सिकट (approximate) मान मालूम किया जा सकता है। इस गुपाक का बास्तिक मान किए प्रकार परिकरित किया जाता है यह आगे बताया जायगा। परंतु इस सारसिक मान का महरून केवल उस समय है जब समायवण एक-यातक अपवा प्राय एक पातक हो। प्रकीण-जिब्ब हारा यह तय करने में बड़ी सहायता मिलती है कि समाययण को एक पातक मामना कहाँ तक ठीक है।

९ १४६ सह-संबंध गुणाक (Correlation Coefficient)

पिंद X और Y के माध्यों को हम कमश्च X और Y से सुनित करें और X और Y में सहावध्य पनास्मक हो तो हम यह आशा करते हैं कि यदि X का नान X से कम होगा तो Y का नान भी Y से कम होगा । इस प्रकार(X - X) (Y - Y) का मान पनास्मक होगा । इस प्रकार(X - X) (Y - Y) का मान पनास्मक होगा । इस प्रकार X से अधिक हो तो Y का मान भी Y से अधिक हो तो Y का मान भी Y से अधिक हो तो Y का मान भी Y से अधिक हो तो Y का मान भी Y से अधिक हो तो Y का मान भी Y से अधिक हो तो Y का मान भी Y से अधिक के प्रत्येक हो तो Y का मान पनास्मक हो तो Y का मान पनास्मक हो तो Y का मान पनास्मक हो हो गा । इसका अर्थ केवळ यह है कि औरतन इसका मान पनास्मक होना चाहिए।

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{i}-\overline{X})(y_{i}-\widehat{Y})>0$$

इसी प्रकार जब सहसबय ऋणात्मक होता है तो

$$\frac{1}{N} \quad \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{X}) (y_i - \bar{Y}) < 0$$

यही नहीं बल्कि यदि सहसविष घनात्मक और प्रमाढ (strong) है तो

 $rac{1}{\widetilde{N}}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{i}-\widetilde{X}
ight)\left(y_{i}-\widetilde{Y}
ight)$ का मान धनात्मक और बड़ा होता है। यदि सह-

सबव घनात्मक तो हो, परतु निर्वेष (weak) हो तो यह मान घनात्मक और अपेक्षाकृत छोटा होता है । इसी प्रकार ऋणात्मक सहसवध प्रगढ़ अयवा निर्वेष्ठ होने के अनु-

सार $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-X)\left(y_i-\overline{Y}\right)$ का भान ऋणारमक और कमश छोटा अयवा बढा होता है।

इससे यह प्रतीत होता है कि कवाचित् $(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})$ का प्रत्याधित मान $C_{-}=E(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})$

सहसबय का एक अच्छा माप है। परतु इसका मान उन मात्रको (units) पर निर्मार करता है जिनमें X और Y को मापा जाय। बचोकि सह-सबध दो गुणो के सबस का माप है, इसिक्ट हम यह चाहिंगे कि वह इन गुणो के मात्रको से स्वतन्त्र हो। उदाहरण के लिए यदि हम यह जाना चाहिं कि गौनो के सान्य-कोत्रफल और समूर्ण क्षेत्रफल में सबस कीशक प्रमाद है जथना सम्य-सेन्नफल और किसानों की सख्या में, तो C., की तरह का माप हमारे काम में नहीं जा सकता।

Y के स्थान पर $\frac{Y}{\sigma_{\theta}}$ का उपयोग करना । इस प्रकार से प्राप्त C_{es} के मान को हम r से सूचित करेंगे ।

$$r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\sigma_e} - \frac{\bar{x}}{\sigma_e} \right) \left(\frac{\gamma_i}{\sigma_g} - \frac{\bar{y}}{\sigma_g} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x} \right) \left(y_i - \bar{x} \right)$$

$$= \frac{C_{eq}}{\sigma_e - \sigma_g}$$

$$(14.1)$$

इस नये माप ह को जो मात्रको से स्वतंत्र है सहसवय गुणाक (correlation coefficient) कहते हैं।

६ १४७ समाध्रयण गुणाको और सहसब्ध गुणाक में सब्ध

हम समाध्यम रेलाओ का पहिले ही बणन कर चुके हैं। हम देखेंगे कि इन रेलाओ के समीकरण निम्नलिखित है।

$$\frac{Y - \overline{Y}}{\sigma_g} = \frac{C_{\sigma_g}}{\sigma_a \sigma_g} \frac{X - \overline{X}}{\sigma_g}$$
Sequent $(Y - \overline{Y}) = F \frac{\sigma_g}{\sigma_g} (X - \overline{X})$ (14.2)

$$\sigma_{g} = (X - \overline{X}) = \frac{r_{\sigma_{g}}}{\sigma_{g}} (Y - \overline{Y})$$
(14.3)

(143)

ये दोनो समीकरण कमश $\,Y$ के $\,X\,$ पर तथा $\,X\,$ के $\,Y\,$ पर समाध्यण को सूचित करते हैं । $\frac{r \sigma_s}{\sigma_s}$ तथा $\frac{r \sigma_s}{\sigma_s}$ को समाध्ययण गुणाको (regression coefficients) की संशा दी जाती है।

इस प्रकार

by
$$x=rac{r\sigma_y}{\sigma_x}=Y$$
का X पर समाश्रमण-पूचाक
$$bx\,y{=}rrac{\sigma_x}{\sigma_y}=X \ {
m an}\ Y\ {
m tr}\ {
m tr}$$
समाश्रमण गुणाक

$$\therefore b_{x,y}b_{x,y} = \frac{r\sigma_y}{\sigma_y} \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$= r^2$$

.....(14.4)

९ १४.८ सह-संबंध-गुणांक का परिकलन

rका मान प्राप्त करने के लिए X, Y, σ_g, σ_g और C_{ag} का परिकलन आवश्यक है। जाप X, Y, σ_g और σ_g के परिकलन के वो पहिले ही परिचित है। C_{ag} के परिकलन के लिए भी एक सरक तरीका है।

$$\begin{split} C_{sr} &= \frac{r}{N} \sum_{j=1}^{N} (x_i - \tilde{X}_j) (y_i - \tilde{Y}_j) \\ &= \frac{r}{N} \sum_{j=1}^{N} (x_i y_j) - \tilde{X} \tilde{Y} \qquad (14.5) \end{split}$$

$$\therefore r \approx \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \overline{X} \overline{Y}}{\sqrt{\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \overline{X}^2\right] \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \overline{Y}^2\right]}} \\
= \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \overline{Y} \sum_{i=1}^{N} x_i}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \overline{X}^2 \sum_{i=1}^{N} x_i\right] \left[\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \overline{Y}^2 \sum_{i=1}^{N} y_i}\right]}} \dots ... (x4.6)$$

सारणी संख्या 14.1 के लिए हका परिकलन भीचे दिया हुआ है।

$$N=16 \qquad \sum_{r=1}^{16} x_{r} = 116 \qquad \sum_{r=1}^{16} y_{r} = 116$$

$$\therefore \vec{X} = \frac{116}{6} = 7.25 \qquad \therefore \vec{Y} = 7.25$$

१४.९ बहुत बडे प्रतिदर्श के लिए सहसवय गुणाक का परिकलन

यदि कुल अतिरयों में केवल 25 या 30 प्रेक्षण हो तो इस प्रकार सह-सबथ गुणाक का परिकलन करने में अधिक कठिनाई नही होती। परपु यदि प्रतिवर्ध वडा हो, उसमें सैकडो अथवा हजारो प्रेक्षण हो तो इस प्रकार परिकलन समय होते हुए भी कठिन है और इसमें बृद्धि होने की सभावना बहुत अधिक हो जाती है। विस्त प्रकार हम चर के परास (2210g) को कुछ अतराओं में निमाजिस करके—और यह मानकर कि अधर राक्षों के सभी प्रकाण उसके मध्य विद्यु पर स्थित है- स्थानकर के परास करके को भी सरल वना सकते हैं, उसी प्रकार इस सह-सबस गुणाक के परिकलक को भी सरल वना सकते हैं। इस सरीके को नीचे के उदाहरण इदार समझाने की चेटत की गयी है।

194 खेती में प्रति एकड उपज X (बुबलो में) और उनमें बाले हुए नाइट्रोजन स्वाद का परिमाण X (पाउण्डो में) सारणी 142 में दिये हुए है। हम इन अंकडी के आधार पर उपज और खाद के परिमाण के सह-सवध गुणाक का परिकड़न करेंगे। इन परिकड़नों के कई चरण इस सारणी के साम ही दिये हुए हैं।

र्र १४.९१ परिकलन की जांच

बयोंकि इतने लबे परिकलन में गलती हो जाने की सभावना है, इसलिए हर एक[रिकलन की पाँच करना आवस्यक है। यह देखा गया है कि यदि एक ही परिकलन सारजी संख्या 142 नाइट्रोजन स्नाद का परिमाण

>	1	07-02	40-60	60-80	80-100	60-80 80-100,100-120120-140140-160	120-140	140-160						
5	3	1				İ	1	Ī	ľ	ſ			1	5
高 北 北 高 高	T	f2 1	7	ь	-	73	gr)	4	10	177	Z x fee Y 25.	Y ² f,	1 × 2 × 2	Serve & Zat Jare
	ľ		Ī			1			6	R	118	150	54	8
	0		1				1		o.	9	-30	160	8	120
	3/	ŀ				1	-		05	-24	02	73	52	9
	4	4 0	1				1	1	00	91-	-16	32	32	32
	Ť	٩	H	Ī					2	122	-22	12	4	120
	1	10	2						14	0	-16	0	50	0
	İ	1	15	20	6				ક્ષ	જ	114	20	222	41-
	Ī		14	200	20	6	~	н	54	801	2	216	II8	112
	1			9	15	01	4	90	43	129	79	387	- 1	237
	8	¥2	30	#	38	9Z	6	6	194	154	ĭ	1068	649	659
	ş	- 50	-30	٥	38	38	27	38	7					
	2y't-w -82	-37	15	74	80	84	22	30	154					
	180	100	8	0	38	26	10 00	141	6:59					
	2 12 farm 346	£.	12	146	218	126	36	92	1069					
	" 2y Jen 246	7.	-15	0	B	96	99	\$cd	650					
1	1								Ì					

क्ष्म इक्ष्म भीह

को एक ही मनव्य दोबारा करता है तो गलती के दहराये जाने की काफी संभावना रहती है। इसलिए यदि हो सके तो परिकलन को जाँचने के लिए किसी दूसरी विधि का प्रयोग करना चाहिए। इस सारणी में प्रत्येक परिकलन को दो प्रकार से किया गया है। यदि इन दोनों में अतर हो तो अधिक बारीकी से निरीक्षण करके भूल का पता चलाया जा सकता है।

जपर्यंग्त सारणी में किसी विश्वेष (x,'y') खाने की बारंबारता की face से स्चित किया गया है। इसी प्रकार किसी विशेष अं अतराल की बारवारता को रिश तया किसी विशेष y' अतराल की वारवारता को fy' से सूचित किया गया है।

१४.१० मूलबिंदु व मात्रक का परिवर्तन

परिकलन की सरलता के लिए मूल बिंदु (origin) तथा मात्रको (units) को बदल दिया गया है। इस विभि से अध्याय २ में, प्रसरण के कलन के रायध में, आप पहिले ही परिचित हो चके है।

$$\begin{aligned} & \text{Fer efforth \widetilde{q}} \\ & N = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{j=1}^$$

थह ध्यान देने योग्य बात है कि मूलविंदु और मात्रकों के बदलने से s के मान पर

कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्यों कि (1) $x_i - \overline{X}$ तथा $y_j - \overline{Y}$ कमश्च X और Y के बटनों के माध्यों से x'_i और y_i के अतर हैं और यें यूर्लाइंदु पर निर्भर नहीं करते। (2) यदि x_i और y_i को किन्हीं अचल राशियों C_i और C_i से यूणा किया जाय और गूणनफ़कों को x_i और y'_i से सुचित किया जाय तो

$$\begin{array}{lll}
& N \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \left(x'_{i} - \bar{X}' \right) \left(y_{i} - \bar{Y}' \right) = C_{1}C_{2} \sum\limits_{i=1}^{N} \left(x_{i} - \bar{X} \right) \left(y_{i} - \bar{Y} \right) \\
& N \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \left(x'_{i} - \bar{X}' \right)^{2} & = C_{2}^{R} \sum\limits_{i=1}^{N} \left(x_{i} - \bar{X} \right)^{2} \\
& N \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \left(y'_{i} - \bar{Y}' \right)^{2} & = C_{2}^{R} \sum\limits_{i=1}^{N} \left(y_{i} - \bar{Y} \right)^{2}
\end{array}$$

 $\therefore x' = X C_1$ और $y' = y C_2$ ना सहसवध गुणाक यदि $t'_{x'y'}$ हो ती

$$\begin{split} r_{s's'} &= \sum_{i=1}^{N} (x_i' - \bar{X}^i) (y_i - \bar{Y}^i) \\ &\sqrt{\left[\sum_{j=1}^{N} (x_i - \bar{X}^j)^2\right] \left[\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{Y}^i)^2\right]} \\ &= C_i C_2 \sum_{i=1}^{N} x^i i - \bar{x}) (y_i - \bar{X}) \\ &\sqrt{\left[C_1^2 \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{X})^2\right] \left[C_2^2 \sum_{j=1}^{N} (y_i - \bar{Y})^2\right]} \end{split}$$

$$= \sum_{r=1}^{N} (x_r - \tilde{X}) (y_r - \tilde{Y})$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \vec{X})^2 \left[\sum_{r=1}^{N} (y_i - \vec{Y})^2 \right]}$$

अध्याय १५

वक-आसंजम (Curve Fitting)

६ १५ १ अनुमान में त्रुटि

मान लीजिए कि (X,Y) एक दिचर है। इसमें हमें X का मान जात है और हम Y के मान का अनुमान लगाना बाहते हैं। यह स्पष्ट है कि हम Y के जेनक उन मानो पर विचार करेंगे जो X के इस मान के साप बमन है। मान लीजिए कि Y के ये मान Y_2 , Y_2 , Y_3 , Y_{n-1} , Y_n ,

हमें मालून है कि निसी परिवार की आय बढ़ने के साथ कपडो पर उसका सर्चों भी बढ़ता है। यह इतका स्पष्ट है कि दोनों चरो की स्वतकता की परिकरणना की जींच करना अनावस्यक है। इनके सह सबस गुणाक का मान मालूम करने से भी हुछ विशेष लाभ प्रतीत नहीं होता। देश के लिए योजना बनाने बीठ वह जानवा चाहेंगे कि परिवार की आय जीनने पर बमा कपडो पर उसके खर्च का अनुमान लगा सकते हैं। इस फलार परि उन्हें यह पता की आय जीनने पर बमा कपडो पर उसके खर्च का अनुमान लगा सकते हैं। इस फलार परि उन्हें यह पता का सकता है कि परिवार के लिए कुछ कितने कपड़े की अवस्थनता होगी।

ये अनुमान चुटिपूर्ण हो सकते हैं । एक ही आयवाले अनेक परिवार हो सकते हैं, परतु जन सक्का करको पर सर्च बरावर नहीं होगा । यदि हम इनमें से किती एक 1- पेपिपार के कपड़े पर सर्च का अनुमान γ' लगायें और वास्तिक कर कर्ष γ हो तो चृदि $(\gamma'-\gamma_i)$ होगो । क्योंकि यह अनुमान केवल आय X पर निभेर नरता है, इस्तिक उन कर्योश्योदकर के दिन्द दिन्दर्स के यह के अनुमान γ' हो होगा और जुटिसा नभन γ' हो होगा और जुटिसा नभन γ' हो होगा और जुटिसा नभन γ' हो हो स्व

अब प्रस्त यह है कि खर्च का ब्युनाम किस प्रकार रूपाया जाय। इसके छिए हम ऐस परिवारों का एक याद्विष्टक प्रतिवर्ध के राक्ते हैं जिनकी आप भ हो। इनके करादों के सर्च के प्रेक्षित मानों के आधार पर हम ऐसे मान // की निर्वारित कर सकते हैं जिसके इन प्रेक्षित मानों का औसत जलर न्यूनतम हो। यदि प्रतिदर्ध समस्टि मा एक अच्छा प्रतिनिधि हो तो इस // को भ जाववाले परिवारों के छिए कपड़े पर खर्च के प्रतिनिधि हो तो इस // को भ जाववाले परिवारों के छिए कपड़े पर खर्च के प्रतिनिधि को लगे दें स्थाप विह्ने से ही जावते हैं मि विष इस प्रमिनिधि को / के प्रेक्षित मानों का मान्य किया जाव तो नुटियों का वर्ष-योग व्यूनतम होंगा।

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} \{(y_i - a) - (\hat{y} - a)\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - a)^2 - n(\hat{y} - a)^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (y_i - a)^2$$

जहाँ कोई भी अन्य कल्पित प्रतिनिधि है ।

परतु मोजना बनाने वालो को कियो बिशेप आप अ में ही विशेष विकल्पनी नहीं है। वे ती अ के सर्थक मान के लिए अ का बतुमान जानना चाहेंगे। यदि अ के प्रत्येक मान के लिए परिवारों का अकर-अवा अतिवर्ध लिया जाय थो कुल मितदाँ बहुत बड़ा ही जामना। इसके अविदित्त सामारणवा हमारे पास परिवारों को ऐसी सुची नहीं होती जिसमें उनकी लाय भी दी हुई हो। परिवारों को चुनने और उनसे प्रस्तु करने परिवार मुनने के लिए हमें कुल बहुत अधिक परिवारों से जॉन पहताल करनी होगी। यह कोई सतीयजनक तरीन नहीं है।

वास्तव में वो तरीका वपनाया जाता है वह निम्मिक्कित है। परिनारों से एक षडे मिद्दर्श को चुना जाता है। इन में से प्रत्येक के किए कुछ आम X और वपड़े पर वर्ष Y को मालूम किया जाता है। तब इन प्रेशणों के आपार पर X और Y का सबस मालूम किया जाता है। ६ १५.२ अनुमान के लिए प्रतिरूप (model) का उपयोग

किसी भी \hat{Y} को X के एक फलन $\int (x)$ और एक यादृष्टिक चर ६ के योग के बरादर मान लिया जाता है।

 $y = f(x) + \epsilon \qquad \dots (15.1)$

यदि X=x दिया हो तो Y का अनुमान y=f(x) िलया जाता है। इस अनुमान के अच्छे होने का निवप (criterion) यह है कि $\sum[y-f(x)]^2$ स्यूनतम हो जहाँ यह योग प्रतिदश्चे की प्रत्येक इकाई के लिए किया गया हो।

समीकरण E(Y|X=x)=f(x) की हुम X के उपर Y का समाध्ययण कहते हैं। यदि f(x) पर कोई नियमण न रखा जाय तो यह एक बहुत जटिक फलन हो सकता है। यद सभर है कि इस अकार कि किसी जटिक फलन के लिए प्रतिवर्श में y और f(x) का जतर सून्य रह जाव, परंदु यह आवस्यक नहीं कि यह समिद के लिए प्रतिवर्श में y और f(x) का जतर सून्य रह जाव, परंदु यह आवस्यक नहीं कि यह समिद के लिए प्रतिवर्श में y और f(x) का जतर सून्य रह जाव, परंदु यह आवस्यक नहीं कि यह समिद के लिए प्रतिवर्श में अवेर्गतम होगा। इस शक्त के कारण हम जाव सारक करते हैं। किर हम उससे कुछ पटिक करने का आसजन करने देश सकते हैं कि क्या चूदि वर्ष-मोग में इस जिटका के कारण कोई निरोध कभी हुई है। यदि कभी साधारण हो तो हम सरक प्रतिवर्भ के जिटका प्रतिवर्भ के उत्तम समझेंगे और उसी के अनुसार अनुसार अनुसार कार्यों ।

किस सरल प्रतिरूप से आरभ किया जाय यह प्राय लेखाँचित्र (graph) देवकर समझा जा सकता है। बहुषा यह सबध केवल एक-वातीय (linear) ही होता है! यानी

γ=a+bx+ ∈ (15 3)

a और b इस प्रतिरूप के प्राचल है। हमारा उद्देश्य a और b को इस प्रकार चुमता है कि $\Sigma = 0$ और $\Sigma = a$ स्थातक हो।

४,१५.३ अवकल कलन के कुछ सुत्र

यदि आपने अवक्र करून (differential calculus) का कुछ अध्ययन किया हो तो आपको यह ज्ञात होगा कि यदि a=a' के लिए g(a,b) का मान न्यूनतम है तो

 $\frac{\partial g}{\partial a} = 0$

हसी प्रकार यदि b=b' के लिए g(a,b) का मान न्यूनतम हो तो $\frac{\partial g}{\partial b}\Big|_{b=b'}=0$

इन दोनों समीकरणों के हल से हमें व' और b' प्राप्त हो जायेंगे।

यहां हम कुछ सूत्र अवक्छ फलन के दे रहे हैं जिससे आपको वक-आसजन में सहायता मिलेगी।

(1) बिंद
$$\phi(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)$$

हो $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f_k(x)}{\partial x} \dots$ (1)

(2) यदि C एक अचर (constant) है तो

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0$$
 (2')

(3) यदि ' φ(x) = kxⁿ

$$\overline{a} \qquad \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = knx^{n-1} \qquad \dots (3')$$

जहाँ k और n दो अचर है।

१५.४ एक-चात प्रतिरूप का आसंजन

इन तीन सूत्रों की सहायता से हम एक पात-प्रतिरूप का आसंबन करेंगे।

हमारी समस्या है $\sum\limits_{a}^{n} e_{a}$ की a और b के लिए न्यूनतम करता।

$$\sum_{i=1}^{n} e_{i}^{3} = \sum_{i=1}^{n} (y_{i} - a - bx_{i})^{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_{i}^{3} + na^{3} + b^{3} \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{3}$$

$$- 2a \sum_{i=1}^{n} y_{i} - 2b \sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i} + 2ab \sum_{i=1}^{n} x_{i}(15.4)$$

$$\begin{array}{ll} \exists \sum\limits_{i=1}^{n} \in ,^{4} \\ \hline -\partial a & = 2\pi a - 2 \sum\limits_{i=1}^{n} y_{i} + 2b \sum\limits_{i=1}^{n} \end{array}$$

a के जिस मान के लिए ∑ूँ ८₁ न्यूनतम होगा उसके लिए

इसी प्रकार $\sum\limits_{i=1}^{n}$ \in , s को b द्वारा अवकल्पि करके हमें निम्मलिखित समीकरण

प्राप्त होता है

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad (B)$$

(A) और (B) को हल करने पर हम देखते हैं कि

$$b = \sum_{\substack{j=1 \ j=1 \ j$$

$$= r \frac{\sigma_y}{\sigma_a}$$

b के इस भाग को समीकरण (A) में रखने पर

$$a = \overline{y} - \frac{y\sigma_y}{\sigma_a} \widehat{x} \qquad \dots (15.6)$$

क्षत्र यदि हमें Xका कोई मान x दिया जाय तो उसके लिए इस रेखा पर Y का मान होगा

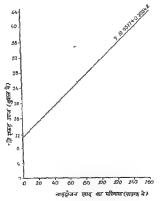
$$\left(\overline{\gamma} - \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}\overline{x}\right) + \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}x = \overline{\gamma} + \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

यही उस X के लिए Y का अनुमान है।

पिछले अध्याय में जिस सारणी से सह-सबध-गुणाक का परिकलन किया गया या जसके लिए

$$b = 0.8422 \times \sqrt{\frac{945.7526}{648.0040}} \times \frac{4}{20}$$

चर्चाति
$$\sigma_s^2$$
 =945 7526 σ_s^2 =648 9949 और σ_s^2 =4 σ_s^2 , σ_s^2 =20 σ_s / =0 8422×1 2073×0 2000 =0 2034
$$a = 0(24+4\times0.7938) --0 2034(70-0 1003)$$
=27 1752-14 2175=10 9577
$$y = \frac{7}{4}y_1^2 + 23 , x = 20 x_1 + 70$$
(देखिए, सारणी संख्या 142 और $x = 20 x_1 + 70$



चित्र ३५--सारणी 14 2 के लिए प्रकीण चित्र और सरल समाध्यय रेखा

६ १५.५ अधिक सरल प्रतिरूप

जैसा कि हुम पहिले कई बार कह चुके हैं, विज्ञान का एक महत्वपूर्ण कार्य है सपूर्ण ज्ञान को कुछ सिद्धातों अथवा सूत्रों के रूप में रखना। इसके छिए वैज्ञानिक का यह प्रयस्प रहता है कि जहाँ तक हो सने चिद्धातों को सरस बनाया जाम। यदि वास्तविकता एक सरस सिद्धात द्वारा समजी जा सक्ती है तो उसे जटिल बनानेकी कोई लावस्यकता नहीं है।

X के ऊपर Y के समाश्रयण को माजूम करने में भी यह प्रयत्न रहता है कि जिदने कम प्राव्यों का उपयोग हो उतना ही जन्छा। ऊपर हमने a और b दो प्राव्यों का उपयोग किया था। जाप यह जानना चाहुँगे कि क्या नीचे दिये हुए सरक समीकरणों का उपयोग सेकेट नहीं था।

(i)
$$y = a' + \epsilon$$
 (15.7)

(ii)
$$y = b'x + \epsilon$$
(15.8)

आहए, पहिले हम इन समीकरणों के जाचलों व' और b' का प्रावकलन करें।

(i)
$$\sum_{i=1}^{n} \in J^{2} = \sum_{i=1}^{n} (\gamma_{i} - \alpha')^{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2d' \sum_{i=1}^{n} y_i + nd'^2 \qquad (15.9)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \in \mathcal{I}^{2}}{\partial a'} = -2\sum_{i=1}^{n} y_{i} + 2a'n = 0$$

अथवा $a^i = \overline{\gamma}$ (15.10)

(a)
$$\sum_{j=1}^{n} \in j^{2} = \sum_{j=1}^{n} (y_{j} - b^{j} x_{j})^{2}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} y_{j}^{2} - 2b^{j} \sum_{j=1}^{n} x_{j} y_{j} + b^{j} \sum_{j=1}^{n} x_{j}^{2} \qquad \dots (15.11)$$

738

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial b^i} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2b^i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

क्षपमा
$$b^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \, \gamma_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (15.12)$$

६ १५-६ प्राक्कलको के प्रसरण

यत हमें यह देनना है कि इन सरक प्रतिन्दों के लिए मुटि के दर्ग-गोग नया है। न्या वे समाध्यण $y=a+bx+\in a$ की नृष्टि के वर्ग-योग से बहुत अधिव है? यदि ऐसा है तो $y=a+bx+\in a$ को हो जचित समजा आयणा। यदि ये लगभग बराबर ही है है तो बमेताहृत सरक प्रतिन्दों को पुना जायगा। इसके लिए निम्निजित्ति परि-मत्त्रावाँ मा परीक्षण जिला जाता है

परतु इसने पहिले कि हम इन गरिकलानाओं से परीक्षण का अध्ययन करें, हमें यह जानना आवस्यक है कि यह परीक्षण किन अभियारणाओं पर आधारित हैं। ये अभियारणाएं निस्नोशनित हैं।

- (क) E(∈ |x)=0
- (स) V(६ | x)==02 जो x से स्वतत्र है
- (ग) € का बटन X के किसी भी मान के लिए प्रसामान्य है।

o", का एक उचित प्रावकलक ீ , है जहाँ

$$s_{n,a}^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 - \frac{1}{n-2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 - a \sum_{i=1}^{n} \gamma_i - b \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i \qquad \dots (15.13)$$

(देजिए, समीकरण (A) और समीकरण (B)

ऊपर जिस सारणी के लिए हमने शह-सवध-गुणाक का परिकटन किया था उसके लिए X पर Y के समाध्ययण रेखा का समीकरण था

मयोकि हम ऊपर देख चुके हैं कि a=10 9577 तथा b=0 2034 और y=(4y',+22), x=20x';+70

$$\sum_{i=1}^{194} y_i = (154 \times 4) + (22 \times 194) = 4884$$

$$\sum_{p=1}^{294} y_p^8 = (1068 \times 16) + (2 \times 22 \times 4 \times 154) + (22 \times 22 \times 194)$$

$$\sum_{i=1}^{154} x_i y_i = (659 \times 80) + (280 \times 154) + (440 \times -1) + 22 \times 70 \times 194$$

(देखिए, सारणी सख्या 142 और ९ १४१०)

इसलिए इन आंकडो के लिए

$$= \frac{4398 \ 4492}{192}$$
$$= 22 \ 9086$$

यदि n प्रेक्षण-युम्मो के अनेक प्रतिदर्श एक ऐसी समस्टि में से चुने जाये जिसका सरळ समाश्रमण प्रतिक्य उचित्त हो और यदि स्वतन चर X के मान $x_1 x_2$ x_2 सब प्रतिदर्शों के किए समान हो हो

(2) 3 का प्रसरण निम्नलिखित होगा

$$V(\underline{z}) = \frac{\sigma_{\underline{z}}^{\underline{z}} x_{-}}{\sum_{\underline{z}=1}^{\underline{z}} (x_{1} - \overline{x})^{\underline{z}}}$$
(15 15)

(3)
$$E(a) = a$$
 (15 16)

(4)
$$V(\vec{\epsilon}) = \underbrace{\frac{\sigma_{xy}^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} (x_i - \vec{x})^2}}_{\text{so } 1}$$
 (x527)

६ १५७ परिकल्पना परीक्षण

यदि प्रशिवस-परिमाण बहुत वज हो तो ऊपर श्लिक हुए अनुवया के अनुसार ४ के प्रशिवसीज नटन (sampling distribution) का ऐसे प्रशासाय घटन हारा समित्रका निया जा सकता है जिसका साध्य b और प्रसरण न्रूट हो ! हो।

द्वारा सामकटम क्या जा सकता है जिसका साध्य
$$D$$
 यार प्रसर्ण $\frac{\sigma_{p,z}}{z}$ हो । $\frac{z}{z}$

प्रे अज्ञात है परतु इस बड़े प्रतिदर्श में ज्या के स्थान पर उसके प्रावकलक रूप ।

का उपयोग किया था सकता है। इसिंहए यदि \hat{b} का भान — 1 96 $\int_{-\hat{b}_{n-1}}^{\hat{a}_{n-1}^2} \int_{\hat{b}_{n-1}}^{\hat{a}_{n-1}^2} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(\kappa_{i}-\hat{x}_{i})^2}$

से कम अथवा $+196 \int_{\sum_{i=1}^{2} (x_{i} - \overline{x}_{i})^{2}}^{\frac{x_{i}^{2} - x_{i}^{2}}{2}}$ से अधिक हो तो हम निराकरणीय परि-

कल्पना b=o को पाच प्रतिचत स्तर पर अस्तीकार कर सनते है। इसी प्रकार क्रै के बटन वा र्रानिकटन एक प्रसामात्व बटन से विवा जा सकता है जिसने माध्य और प्रसरण तमीकरण (1516) तवा (1517) से प्राप्त होते हैं। इसलिए यदि वै

का परिकलित मान
$$-196$$
 $\sqrt{\frac{s_p^2\sum_{j=1}^{N}x_j^2}{n\sum_{j=1}^{N}(x_j-x_j)^2}}$ ते कम हो अपना $\sqrt{\frac{n}{n}\sum_{j=1}^{N}(x_j-x_j)^2}$

$$+1.96 \sqrt{\frac{\sum_{y=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_{j}^{2}}{n \sum_{i} (x_{i} - \widehat{x})^{2}}}$$
 से अधिक हो तो हम निराकरणीय परिवल्पना

6 को पौज प्रतिशत-स्तर पर अस्त्रीकार कर देते हैं। प्रेशित मान-पुग्गो द्वारा हमें इस बात का आभारा भिक्त सबता है कि संप्रीट में सरक समाध्यण का प्रतिरूपण कहाँ तक उपयुक्त है परतु यह सामाख हमें प्रेशित मानो के परास के लिए ही मिल सकता है। यह बहुत समय है कि प्रेशित परास में तो सरक समाध्यण उपयुक्त हो, परतु परास के बाहर समाध्यण कर कुछ और हों हो। इस कारण प्रेसण के साधार पर प्रोशित परास के वाहर के किसी मान के लिए मानो के माध्य परास के वाहर के किसी मान के लिए मानो के माध्य परास कर बाहर के किसी मान के लिए मानो के माध्य परास कर ही ल्याना चाहिए।

६ १५८ द्वि-घाती परवलय का आसजन

यदि समाध्यण वक का समीवरण एक पात फरून हो तो हम देल चुके हैं कि प्रतिवर्ध से हम समाध्यण वक के प्राव्कों का प्राव्करून किस प्रकार करते हैं। यही विधि बहुताती परकरण-वकीम समाध्यण होने पर भी अपनायी जाती है। कि-चादी परवरूप (parabola of second degree) के प्राव्कर के प्राव्करून की विधि उद्याहण स्वरूप नोले सी हुई है।

द्वि-चाती परवलय का समीकरण निम्नलिखित होता है।

$$\gamma = a + bx + \epsilon x^2$$
 ... (15 18)

a, b और c इस कक के प्रावल है। यदि प्रतिवर्ध में (X,Y) युग्म के मान (x_0,y_1) , (x_0,y_2) \cdot (x_0,y_0) हो तो हम a, b और c के ऐसे मान मालूम करमा चाइत है जिनके छिए

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i - \epsilon x_i^2)^2$$

न्यूनतम हो।

$$Q = \sum_{i=1}^{n} y_{i}^{2} + na^{2} + b^{2} \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} + c^{2} \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{4}$$

$$-2a \sum_{i=1}^{n} y_{i} - 2b \sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i} - 2c \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} y_{i}$$

$$+2ab \sum_{i=1}^{n} x_{i} + 2ac \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} + 2bc \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{3} \dots (15.19)$$

 के जिस मान के लिए न्यूक्तम होगा वह निम्मलिखित समीकरण को सतुष्ट करेगा।

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0$$

बसवा $2an - 2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i + 2c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$

अपना
$$\sum\limits_{i=1}^{n} y_{i} = na + b \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i} + c \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i}^{2} \cdots \cdots A$$

इसी प्रकार है और c के लिए हमें निस्नलिखित समीकरण प्राप्त होते

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i} = \sum_{i=1}^{n} x_{i} + b \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} + c \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} \cdot \dots (B)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} y_{i} = a \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} + b \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} + c \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{4} \cdots (C)$$

a, b और c प्राचलों में (A), (B) और (C) तीन मुगपद (simultaneous) समीकरण है। इनके हल से हमें a, b, और c के इंग्छित मान सात हो जाते है।

(Λ) और (B) में से a का निरसन (climination) करने से हमें निम्न-स्थित समीकरण प्राप्त होता है।

$$\begin{split} & \left[\sum_{i=1}^n x_i y_i - \overline{x} \sum_{i=1}^n y_i\right] = b \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{x} \sum_{i=1}^n x_i \right] + b \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{x} \sum_{i=1}^n x_i^2\right] \\ & \text{ where } & S_{xy} = b \cdot S_{xx} + c \cdot S_{xx}^2 \quad \dots \dots (D) \\ & \text{ with } & S_{2x_2} = \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_i) \left(x_i - \overline{x}_2\right) \end{split}$$

इमी प्रकार (A) और(C) में से a का निरसन करने से हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है।

$$S_{x^2x} = b S_{x^2x} + \epsilon S_{x^2x^2} \qquad \dots (E)$$

(D) को S2 तथा (E) को S से गुणा करके एक में से दूसरे घटाने पर हमें निम्नलिखित समीकरण मिलता है

$$\begin{split} &S_{xy} \, S_{x}^{\, 2} - S_{x}^{\, 2}, \, S_{xx} \, \cong \, C([S_x^{\, 2}_x]^2 - S_{xx} \, S_{x}^{\, 2}^2) \\ & : \, C \, = \, \frac{S_{xy} \, S_{x}^{\, 2} - S_{xy} \, S_{xx}}{[S_x^{\, 2}_x]^2 - S_{x}^{\, 2}_x \, S_{x}^{\, 2}} \qquad \qquad \dots \, (C) \end{split}$$

c के इस थान की (D) में निविष्ट करने पर

$$b = \frac{S_{a^{2}\nu} S_{a^{2}\nu} - S_{e^{\gamma}} S_{a^{2}\nu^{2}}}{[S_{a^{2}}]^{2} - S_{e^{\gamma}} S_{a^{2}\nu^{2}}} \qquad (B')$$

b और c के इन मानो को समीकरण (A) में रखकर हम a का मान प्राप्त कर सकते हैं।

 $a = v - bx - cx^2$. . (A')

यदि आपकी इच्छा हो तो जिस सारणी का उपयोग अभी तक हम करते आ रहे हैं उसके लिए a, b और c का परिकलन ऊपर दी हुई विधि से कर सकते हैं।

अध्याय १६

प्रतिबंधी बंटन, सह-संबंधानुपात और माध्य वर्ग ग्रासंग

(Conditional Distribution, Correlation Ratio and Mean Square Contingency)

प्रतिवधी प्रायिकता (conditional probability) से आप परिचित ही है। आप जानते हैं कि यदि A और B दो घटनाएँ हो तो यह दिये होने पर कि B घटी है A की प्रायिकता निम्नालिखित सुत्र से प्राप्त होत्री है

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

\$ १६१ असतत चर

अब नान सोजिए कि (X,Y) एक असतत हि-चर है तथा X और Y कमश्च x_1 x_2 , x_n तथा y_2 , y_n मान धारण करते है । बिंदु (x_i, y_n) पर जो प्रायिकता है उसे हम P_k से सचित करेंगे।

$$P[X = x_0 | Y = y_k] = p_{t_k}$$
(16.1)

यदि हम p, द्वारा X=x, होने की प्रायकता की सुचित करें तो

$$p_i = P[X=x_i] = \sum_{k=1}^{n} p_{i_k}$$
(16.2)

$$\therefore P\left(Y=\gamma_{k} \mid X=x_{i}\right) = \frac{P\left(X=x_{i}, Y=\gamma_{k}\right)}{P\left(X=x_{i}\right)} \frac{p_{i_{k}}}{p_{i}} . (16.3)$$

मिंद हम X=x, के दिखे होने पर Y के प्रत्येक मान के जिए प्रतिवर्धा प्रापित्रका मालूम करें तो X=x, के दिखे होने पर Y का प्रतिवर्धी बटन (conditional distribution) प्राप्त होना है। यह स्पन्त है कि यह प्रतिवर्धी बटन केवल उसी देता में अर्थ-पूर्व हो सकता है जब p, सूचन हो। प्रतिबंधी साध्य—प्रतिवध्य $X=x_i$ के दिये होने पर (X,Y) के विश्ती फलन ϕ (x,y) का साध्य निम्नलिखित रूप से प्राप्त किया जा सकता है।

$$E\left[\phi(X, Y) \mid X = x_i\right] = \sum_{k=1}^{n} \phi\left(x_i, y_k\right) \frac{p_{ik}}{p_i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \phi\left(x_i, y_k\right) p_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{p_i}{p_i}$$
. (164)

यदि $\phi(X,Y)=Y$ तो

$$E(Y|X=x_i) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k P_{ik}}{p_i} \dots (165)$$

इस माध्य को Y का प्रतिवयी माध्य बहुते हैं और हसकी m_{χ}^{0} से स्थित करते हैं। यदि ϕ $(X,Y)=\left[Y-m_{\chi}^{0}\right]^{2}$ हो तो हमें Y का प्रतिवयी प्रसरण प्राप्त होता है।

$$V(Y \mid X = x_i) = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\gamma_k - m_k^{(i)})^k p_{i_k}}{p_i}$$
(166)

इसी प्रकार प्रतिवध $Y = y_k$ से सर्वाधित X का बटन, उसका साध्य और प्रसरण भी हम मालूम कर सकते हैं।

§ १६२ सतत वर

यदि (X,Y)का षटन सतत ही और $f(x,\gamma)$ उसका घनन्व फलन ही ती

$$P \left[x < X < x + h\right] = \int_{x}^{x+h} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right) dx dy$$

मदि प्रतिकथ (x < X < x + h) दिया हो तो $Y \leqslant y$ की प्रतिकथी प्राधिकता निम्नलिखित होगी

$$P[Y \leqslant \gamma \mid x \leqslant x \leqslant x + h] = \frac{P[Y \leqslant \gamma \quad x \leqslant x \leqslant x + h]}{P[x \leqslant x \leqslant x \leqslant x + h]}$$

$$= \begin{cases} \int_{x}^{a+b} \int_{x}^{b+c} f(x, y) dx dy \\ \int_{x}^{a+b} \int_{x}^{b+c} f(x, y) dx dy \end{cases} (167)$$

यदि X=x पर X के बटन का घनत्य फलन $f_{\tau}(x)$ धनात्मक है तो

It
$$P(Y \le y \mid x < X < x + h) = \int_{-\infty}^{y} f(x y) dy$$

$$\int_{-\infty}^{y} f(x y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{y} f(x y) dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x y) dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x y) dy$$
(16 8)

মনিবয় X = x के लिए यह Y का प्रतिवधी बटन फ्लन (conditional distribution function) कहलाता है। ইस फलन का y के प्रति अवस्थलन (differentiate) কলে पर हम Y का प्रतिवधी धनस्य फलन $f_2(y|x)$ प्राप्त होता है।

$$f_3(y|x) = \frac{f(x|y)}{f_1(x)} \tag{169}$$

प्रतिश्वरो माध्य-X=x विस होन पर (XY) के किसी फलन ϕ (XY) का प्रतिवर्धी माध्य निम्निलिखत होगा।

$$E\{\phi(XY)|X=x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(xy) f_{\theta}(y|x) dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(xy) f(xy) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\theta}(x) f(xy) dy$$
(16 to)

Y के प्रतिवधी माध्य को यदि हम m_* (x) से और प्रतिवधी प्रसरण को $\sigma_2^2(x)$ से सूचित करें तो

$$m_{2}(x) = E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y) dy$$

$$f_{1}(x) \qquad \dots (16 \text{ I2})$$

$$\int_{0}^{\infty} [y - m_{2}(x)]^{2} f(x,y) dy$$

$$\sigma_{2}^{2}(x) = V(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{1}(x) dy \dots (16.12)$$

हुती प्रकार X के प्रतिबंधी बटन, प्रतिबंधी माध्य $m_{\chi}(\gamma)$ और प्रतिबंधी प्रसरण $\sigma_{\chi}^{2}(\gamma)$ की व्याख्या की जा सकती है।

६ १६३ समाश्रयण (Regression)

 $m_1(x)$ स्पष्टत x का एक फलन है। x फे विभिन्न मानो के लिए यह विभिन्न मान घारण कर सकता है। $y=m_2(x)$ एक बक का समीकरण हैजों (X,Y) समतल में x के विभिन्न मानों के लिए $[x,m_1(x)]$ विनुत्रों को सिखाता है। इस बक को X पर Y का समाध्यण कहते हैं। इसी प्रकार Y के विभिन्न मानों के लिए $[m_1(y),y]$ विनुद्रभी को मिलाता हैजा बक $x=m_2(y)$ है जो Y पर X का समाध्यण कहलाता है। यदि $m_1(x)$ x का एक-पात फलन (Incar function) होता है तो X पर Y के समाध्यण को सरल समाध्यण कहते हैं। इसते प्राचलों का प्रावकलन प्रतिवर्ध के आधार पर की सिचा जाता है, यह कुम पिछले कष्ट्याय में लिखा हो चुके हैं।

समाश्रमण बको का एक शहरचपूर्ण गुण होता है। X के सब फलाने में से यहि हम उस फला $\phi(x)$ को चुने जिसके छिए $E[Y-\phi(x)]^2$ न्यूनतम हो तो यह सिद्ध किया जा सबता है कि $\phi(x) = E[\gamma|x)$ क्योंकि

$$E[Y-\phi(x)]^{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [Y-\phi(x)]^{2} f(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{3}(x) dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} [Y-\phi(x)]^{2} f_{3}(y|x) dy... (16.13)$$

आप यह आजते ही है थि किसी भी बटन के लिए $(y-a)^2$ का प्रत्याधित मान a=E(y)पर स्थूमतम होगा है। इसलिए Y के प्रतिवधी बटन के लिए $[y-\phi(x)]^2$ का प्रत्याधित मान $\phi=E(Y|x)$ होने पर स्थूनतम होगा । इस प्रकार Xपर Y का समाध्यण कर ऐसा होता है कि X के बान के आधार पर Y का अनुमान रूगाने के लिए यति हम कर पर ताता x के लिए y स्थानाक (coordinate) को छ तो चूटि $[y-\phi(x)]$ के बसं पा प्रत्याधित सान रूप किसी भी बक्र पर आधारित अनुमान की चूटि के याँ के प्रत्याधित सान के रूप होते के याँ के प्रत्याधित सान के रूप होता है।

§ १६.४ सह-सबधानुपात (Correlation ratio)

यदि Y के साध्य को ma और प्रसरण को of से सूचित किया जाम तो

$$\begin{split} \sigma_{\mu}^{2} &= E \left(Y - m_{z} \right)^{2} \\ &= E \left[Y - m_{z}(X) + m_{z}(X) - m_{z} \right]^{2} \\ &= E \left[Y - m_{z}(X) \right]^{2} + E \left[m_{z}(X) - m_{z} \right]^{2} \end{split}$$
 (16 14)

क्षत प्रकार हुन वेखते हैं कि Y के प्रसरण को वो सवटको (components) के कर्प में रखा जा सकता है। एक समदक दी उसके प्रतिवधी माध्य $m_1(X)$ से Y का माध्य को विचलन है और दूसरा $m_2(X)$ का उसके साध्य m_1 से माध्य वर्ग विचलन है

बादि हुस
$$\frac{E\left[m_2(X)-m_2\right]^2}{\sigma_z^2}$$
 को η^2 द्वारा सूचित कर तो $\eta^2 = \frac{E\left[m_2(X)-m_2\right]^2}{\sigma_z^4}$ = $1 - \frac{E\left[Y-m_2(X)\right]^2}{\sigma_z^4}$. (16 15) $\therefore 1 - \eta^2 = \frac{E\left[Y-m_2(X)\right]^2}{\sigma_z^2}$ $\geqslant 0$ $\therefore 0 \leqslant \eta^2 \leqslant 1$ (15.16)

इस मान ग को हम सह-सबयानुपात कहने हैं। यदि समाश्रयण एक-घाती

है तो

$$m_{2}(x) = a+bx \text{ aft}$$

$$I-\eta^{2} = \frac{E[Y-a-bx]^{2}}{\sigma_{2}^{2}}$$

$$= I-\rho^{2}$$

इसलिए इस दशा में १º = 0°

यह स्पष्ट है कि n^2 —ा केवल उसी अवस्था में हो सकता है जब कि $E[Y-m_2]$ —0 हो, अर्थात् जब Y के m_3 (X) में जिल्ल होने की प्राधिकता सून्य हो। n^2 को इस कारण प्राधिकताओं की समाय्यण वरू के पास एकतित होने की मब्ति का एक माप समझा जा सकता है।

जिस प्रकार सतत चर के लिए सह-सब्धानुपात की व्याख्या की गयी है उदी प्रकार असतत चर-युग्म के लिए भी की जा सकती है। इस दक्षा में

$$\eta^2 = \frac{1}{\sigma_3^2} E \left[m_3^0 - m_2 \right]^2$$

$$= \frac{1}{\sigma_2^2} \sum_{r=1}^{\infty} \left(m_3^0 - m_2 \right)^2 p_r. \dots (16.17)$$

११६५ माध्य वर्गे आसंग

सह-सबमानुपात हमें X पर Y की निर्भरता का आभास देता है। इसी उद्देश से अनेक अन्य सामों का की प्रस्ताव किया गया है जिनमें से एक साध्य वर्ग सासगं (mean square contingency) है। इसका उपयोग केवल असतत समस्त्रिंगों के किए किया जाता है।

यदि असतन चर युग्म का बटन निम्नलिखित है

 $P\left[X=n,\ Y=p_k\right]:=p_k$; $j=p_{2^{k-1}},\ w$; $k=x,z_{\ell}$, n तो हम इन प्राधिकताओं को एक सारणी में रख सकते हैं जिसमें m पनितर्यों और n स्तम हैं।

प्रतिबंधी घटन, सह-सबयानुपात और माध्य वर्ष आसग

सारणी संख्या 161

[X, Y] का वटन

	Y	Yı	Ya	72	у,	योग
X		(1)	(2)	(k)	(n)	
\varkappa_1	(1)	P ₃₁	Piz	Pak	p_{in}	p1
× _t	(2)	P ₈₁	Pas	Ps.	Pin	Ps
x_i	(1)	Pn	Pia		Pin	p,
×m	(m)	P _m 1	p_{m2}	Ponk	Pm n	p_m
योग		P 2	P 2	P &	P n	I

क्योंक हम इस सारणी में से इस प्रकार की पक्तियों या स्त्रभों को छोड़ सकते हैं जिनने तब प्रापिकठाएँ पूत्य हो, इसलिए प्रत्येक पत्रित का मोग p, और स्त्रभ का मीग p, पूत्र ते अधिक होया। इस द्वार में दरूत के माध्य-वर्ष आसए की —जिसको फ्रं से सुमित किया जाता है—निमालिखित परिमापा है

$$\phi^{2} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{P_{1k} - p_{1} p_{2} p_{k}^{2}}_{p_{1} p_{k}} \right)^{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{P_{1k}^{2}}_{p_{1} p_{k}} - 1 \qquad (16.18)$$

ф² ब्रूच नेवल उस स्थिति में हो सकता है जब प्रत्येक युग्म (1 k) के लिए $p_{ik} = p_i \; p$, परत हम जानत है कि इस दशा में दोनो चर स्वतत्र होते हैं । इसके अतिरिक्त p_{ik} ≤ p_i और p_{ik} ≤ p_k होने के कारण

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{ik}^{2}}{p_{i,p_{k}}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{ik}}{p_{i}} = n$$
 (16 19)

with $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_{ik}}{P_{i,n}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_{i_k}}{P_{i_k}}=m$ (16 20)

जहां a = M₁₋ (m n)

$$M_{in}(m,n)$$
 से हमारा तात्पर्य m और n सब्बाआ में से छोटी वाली सब्या से हैं।

इस प्रकार $0 \leqslant \frac{p^2}{2n} \leqslant 1$ और $\frac{p^2}{2n}$ का उपयोग दोनो चरो की

पारस्परिक निर्मरता के एवं मानकित मापनी (standardized scale) पर लिये हए माप के लिए किया जा सकता है।

भाग ४ प्राक्कन

सन्याय १७

प्राक्कलन के छारंभिक सिद्धान्त

(Elementary Principles of Estimation)

५ १७.१ प्राक्कलक और उसके कुछ इच्छित गृण

समाध्यण के अध्यायों में हम कुछ समस्टि प्रावकों का प्रावककत कर चुके हैं। इती प्रकार परिकल्पना परीक्षण में—विशेष हव से प्र*गरीक्षण में—क्स प्रावकों के प्रावक्कत से कुछ परिचय प्राप्त कर चुके हैं। किसी भी प्राचल का प्रावक्कत करते के क्षिए प्रेशणों के एक फलन की आवश्यकता होती है जिसे प्रावक्कत (cstimator) कहते हैं।

इस जञ्चाय में हम यह देखेंगे कि प्रावकलको को प्राप्त करने की साधारण विधियाँ क्या है और किस प्रकार के प्रावकलको को अच्छा समझा जाता है ।

किसी प्राचक का प्रावकलक बवा होता चाहिए, यह पूर्वत स्पष्ट नही है । यदापि समिष्ट के माध्य के किए प्रतिसर्व-बाध्य को प्रावककक मानना स्पष्टतपत डॉक्त कान पहता है, परतु समिष्ट-अस्यरण का प्रावककक प्रतिसर्व-प्रसारण नहीं होता। उसने हमें प्रतिसर्व के माध्य से प्राचक के विचकनों के वर्त-बीक को प्रतिसर्व परिमाण से एक कम संस्था द्वारा माग देना होता है। ऐसा क्यों किया जाता है इसका कारण आप कबस्य जानना चहिंगे। आप यह भी जानना चाहने कि किसी नवीन स्थिति में जिससे आग कभी तत परिवित्त नहीं है, प्रायक का प्रावकतन किस प्रकार किया जाया।

 $\|g\left(x_{1},x_{2},...x_{n}\right)-0\|$ बहाँ तक हो तक छोटा हो। परंतु पयोकि $x_{1},x_{2},...,x_{n}$ याद्विकल चर हैं इसिक्ष्य $\|g\left(x_{1},x_{2},...,x_{n}\right)-0\|$ भी एक पाद्विकल कर है—अवर रही। इस कारण इसके छोटे होने की परिधादा हमें इसके प्रतासिक मान (expected value) बक्वा दसकी प्राविक्ता के रूप में

करनो होगी। इस रूप में प्रानकलनो के कुछ इष्टित गुणो की परिभाषा हम नीचे दे रहे हैं।

(1) अनिभनतता (Unbiasedness) मान चीजिए नि g(x_Lx_B, x_n) को हम t_n से स्चित चरते हैं। यदि E[t_n—6]=0 तो हम t_n को एक अन-मिनत प्रावकलक (unbiased estimator) कहते हैं। किसी प्रावकलक के अमिनत होने के गण को अनिमनतता कहते हैं।

यदि $E[t_n-0]$ सूत्य के नरावर न हो तो प्राक्कक अभिनत कहलाता है और $R = E[t_n-0]$ को हम $B(t_n)$ से सूचित करते हैं और इसे प्राक्कक की अभिनित (biss) कहते हैं।

उवाहरण के लिए एक प्रसामान्य बटन $N(\mu, \sigma)$ में से चुने हुए n परिमाण के प्रतिदर्श का साध्य \tilde{x}_n बटन के साध्य का एक अनिभनत प्रावकलक है । क्यों कि \tilde{x}_n^2 एक $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ बद है । $\tilde{x}_n^2 E\left(\tilde{x}_n\right) = \mu$, परंतु प्रतिदर्श का प्रसरण $\tilde{x}_n^2 = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(v_i - \tilde{x}_i^2\right)^2$ बटन के प्रसरण σ^2 के लिए अनिभनत नहीं है बयों कि $E\left(\tilde{x}_n^2\right) = E\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \left[\left(v_i - \mu\right) - \left(\tilde{x}_i - \mu\right)\right]^2 = \frac{\pi}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - \sigma^2\right] = \frac{n-1}{n}$ σ^2 \tilde{x}_n^2 की अभिनति $\frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{1}{n}\sigma^3$ है ।

(2) दक्षना (efficiency)-यदि हम केवल अनिकात प्रावकलको पर विचार करें हो इनमें से एक ऐसा हो सकता है जिसका प्रवरच अन्य सब प्रावकलको के प्रवरच से कम हो। इस प्रकार के प्रावकलक को दस प्रावकलक (efficient estimator) अथवा व्यूनस्तर प्रसरण-अनिमता प्रावकलक (minimum variance unbased estimator) कहते हैं। यदि किसी प्रावकलक है का प्रवरच व हो और एक दस

प्राक्तलक ना प्रसरण σ^2 हो तो t की बसता (efficiency) को $\frac{\sigma^2}{\sigma^2}$ हारा नापा जाता है t इस दसता को e(t) से सूचित करते हैं t

$$(t) = \frac{\sigma'^2}{-3}$$
 (17 I)

, यदि t और t' दो अनिभिन्त प्राक्कलक हो तो t को t' से अधिक दक्ष माना आयगा यदि t की दक्षता t' की दक्षता से अधिक हो अथया V(t) < V(t') मान लीजिए $x_0x_0,...,x_n$ को इस प्रकार कम $y_0y_0,...,y_n$ में रसा

जात कि $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ । यदि n एक विषय सस्या हो तो y_{n+1}

उन श्रक्षणों को माध्यका होगों । क्योंकि एक प्रसामान्य $N\left(\mu ,\sigma \right)$ बटन में माध्य और माध्यका दोनों μ होते हैं इसिछए यह सिख किया जा सकता है कि इस प्रकार के बटन से चुने हुए याद्षिण्डक प्रतिवर्ध के छिए

$$E\left(\frac{\gamma_{n+1}}{3}\right) = \mu$$

 $rac{Y_{n+1}}{2}$ भी μ का एक अनिमत्त प्रायक्कक है । परंतु $V\left(rac{Y_{n+1}}{2}
ight)>rac{\sigma^2}{n}=$

 $V(\vec{x})_L$ इसलिए μ के प्रावकलन के छिए $\frac{y_{g+1}}{2}$ से \vec{x}_g अधिक दक्ष है। संगति (Consistency)

 $P[\{t_n - \theta | < \epsilon\}]$ प्रतिवर्ध परिमाध n का एक फलन है। यहाँ ϵ की है मि तहिंदत धनात्मक सस्या है। अधिकतर यह आजा की जाती है कि यह प्राधिकता n के साथ साथ बरती आयगी। यदि किसी प्रावक्तक t_n के लिए n के ∞ की कोर्यकृत होने के साथ यह प्रतिकता 1 की ओर प्रवृत्त होते t_n को एक संगत (Commission) प्रावकतक कहें 1 हत प्रकार यदि t_n एक संगत (t_n को t_n $t_$

उदाहरण के लिए एक प्रसामान्य बटन $N(\mu, \sigma)$ से चुने हुए प्रतिदर्श का माध्य $\widehat{\mathcal{L}}_n$ चगत है

$$P[|x_{\sigma} - \mu| < \epsilon] = P\left[-\frac{\epsilon}{\sigma|\sqrt{n}} < \frac{x_{n} - \mu}{\sigma|\sqrt{n}} < +\frac{\epsilon}{\sigma|\sqrt{n}} \right]$$

$$= P\left[-\frac{\epsilon}{\sigma} \sqrt{n} < N(0, 1) \exists \forall < \frac{\epsilon}{\sigma} \sqrt{n} \right]$$

$$\vdots \text{ it } P[|x_{n} - \mu| < \epsilon] = P[-\infty < N(0, 1) \exists \forall < +\infty]$$

$$n \to \infty$$

पर्याप्ति (sufficiency) यदि $(x_1, x_2,...,x_n)$ के संयुक्त वटन $f(x_i, x_2,...-x_n)$) को निम्नलिखित रूप में रखा जा सके

 $\int (x_1,x_2,\dots,x_n;\theta)=\int_{I}(t;\theta)\times\int_{I}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ जहाँ $\int_{I}(x_2,x_2,\dots,x_n)$ ऐसा फल्म हो जो θ से स्वतत्र हो जीर θ के लिए t एक प्रावश्यक हो तो t के एक पर्योक्त प्रावक्कक (sufficient estimator) कहते हैं और किसी प्रावश्यक के पर्योक्त होने के गुण को पर्योक्ति कहते हैं।

यह सिद्ध क्या जा सकता है कि यदि 4 प्रयोत्त हो और 9 का कोई अन्य प्राक्त-लक्ष 4 हो जो 4 का फलन नहीं है तो 4 और 4 के सपुक्त बटन को निम्नलिवित कप में रखा जा सकता है

ψ (t₁,t₂,0)= ψ₁ (t₁;0) ψ₂ (t₂t₁)(17.3)

जहाँ ψ_0 में θ वा कोई स्थान नहीं है। इस समीकरण से यह पढ़ा बलता है कि \mathcal{L} के बात होने पर \mathcal{L} का प्रायिक्ता चनत्व ψ_0 ($\mathcal{L}_{\mathcal{L}}$) है जो \mathcal{L} स्वतंत है। अर्थात् \mathcal{L} के बात होने पर अप्य कोई भी प्रायवक्क \mathbb{R} पर कोई अतिरिक्त प्रकास मही बाल सकता। प्रेयका $\mathcal{L}_{\mathcal{L}}$, \mathcal

यदि $x_1,x_2,.....x_n$ एक $N(\mu,1)$ में जुने तुए n प्रेक्षण है तो $x_i=(x_i,x_2,....x_n)$ का संयुक्त बटन निम्मलिखित है

$$f(\underline{x},\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{-\frac{1}{2}}{e} \sum_{i=1}^{2} (x_i - \mu)^2$$

$$q \in \underbrace{\int_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}_{=i} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x} + \overline{x} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu)^2$$

$$\therefore f(\underline{x},\mu) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{\frac{1}{2} \left[\frac{\overline{x} - \mu}{i \sqrt{n} x} \right]^2} \times \frac{1}{\sqrt{n(x^*)}} e^{\frac{1}{2} \left[\frac{\overline{x}}{i \sqrt{n} x} \right]^2}$$

इस प्रकार इस समुक्त बटन को दो गुणन खड़ों (factors) के गुणन के हप में प्ला जो सकता है जिससे से पहिला गुणन कहती के का प्रकार-ककत है और दूसरा गुणन कह µ से स्वत्व है। इसलिए µ के लिए के एक पर्याप्त प्राक्कक है। ১ १७.२ वें। अगिभिन्त प्राक्कक की ला, खेल्यम

यदि ६ और t_2 दोनो एक ही प्रायक θ के जनभिनत प्रायकक है और t_1 तथा t_2 दो ऐसी सन्दाएँ हैं जिनका योग x है तो $t_1t_2+t_2t_3$ सी 0 का एक अनिमनत प्रायककक है क्योंकि

$$E(l_1t_1+l_2t_3) = E(l_1t_1)+E(l_2t_1) \qquad(17.4)$$
== $(l_1+l_2)0$
== 0

पवि t_1 का प्रसन्ध σ_3^2 , t_3 का प्रसन्ध σ_3^2 तथा t_4 और t_4 का सहसवध गुणांक ρ हो तो $V(l_1t_1+l_2t_3)=E\left[l_1(l_1-\theta)+l_3(l_3-\theta)\right]^3$

$$= l_1^a \sigma_1^a + 2 l_1 l_2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + l_2^a \sigma_2^a \dots (17.5)$$

इस प्रकार के दो अनिमनत प्रापकलको का क्ष्म इस प्रकार सचय करना चाहते हैं वि $V(l_1 l_2 + l_2 l_2)$ ब्यूनतम हो । इसके छिए निम्नाळिखित विधि काम में स्वायी जाती है।

हम पहिले ही एक नवीन राशि Q की परिश्वापा निम्मिळिखित सनीकरण से करते हैं

$$Q = V(l_1t_1 + l_2t_2) - \lambda[l_1 + l_2 - 1] \qquad(A)$$

अब हम L और L के वे मान मालूम करते है जो Q को म्यूनतम कर वेते हो । इसके लिए हमें निम्मिलाखित समीकरण प्राप्त होते हैं—

(1)
$$\frac{\partial Q}{\partial l_1} = 0$$

 $\text{state } 2l_1\sigma_2^2 + 2l_2\sigma_1\sigma_2\rho = \lambda$ (B)

तथा (2) $\frac{\partial Q}{\partial l_2} = 0$ अथवा 2 $l_1\sigma_2^2 - 2 l_1\sigma_1\sigma_2\rho = \lambda$ (C)

दन दोनों समीकरणों का हुन ही हमारे प्रकृत का भी हुन है। इनके अनुसार
$$\sigma_1\left(l_1\sigma_1+l_2\sigma_2\rho\right)=\sigma_2\left(l_2\sigma_2+l_2\sigma_1\rho\right)$$
 अववा $l_1\left(\sigma_1^2-\sigma_2\sigma_2\rho\right)=l_2\left(\sigma_2^2-\sigma_2\sigma_2\rho\right)$

बोर
$$l_z = \frac{\sigma_1^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}$$
 (C)

इसी प्रकार यदि हमें एक ही प्राचल के अनेक प्रावनरून जात हो तो हम उनना एक ऐसा एकपाती करन मार्ज्य कर सकते हैं जिसका प्रसरण न्यूनतम हो । इस प्रनार इन प्रावनलकों के समस्त एकपाती फलनों में से वही खबसे अधिक दक्ष होगा !

8 १७३ प्राक्कलक प्राप्त करने की कुछ विधियाँ

ऊनर ही हुई परिभाषाओं से आपको यह मतीत हुआ होगा कि किसी भी प्राचक के लिए पर्याप्त प्राचकक को सोज करनी चाहिए क्योंकि उसके द्वारा प्राचक के बारे में महत्तम सूचना हमें प्राप्त हो सबती है। परतु यह हमेशा समय नहीं है। कर बहाते महत्तम सूचना हमें प्राप्त हो सबती है। परतु यह हमेशा समय नहीं है। कर बहाते के लिए कोई भी प्राप्तकक पर्याप्त नहीं है। हस कारण हमें दूसरी विधिया अपनानी पडती है। इनमें से कुछ जा विशेष महत्त्वपूण है नीचे दी कई है।

६ १७३१ महत्तम समाविता विधि (maximum likelihood method)

मान की जिए कि समिद्ध असतत है और जसमें से एक शाद्विकक प्रतिष्म (x_0,x_0, x_0) के चयन किया जाता है। θ इस समिद्ध कर एक प्राप्तक है। इस वियोध प्रतिदर्श के लिए सभायिता करून L को निम्मिक्सित समीकरण हारा परिसायित किया जाता है

 $L(x_1x_2 \quad x_n,0) = p_1(0) p_n(0) \quad (p_i(0) p_n(0) \quad (176)$ षहाँ $p_i(0) \quad x_i$ के एक ऐसी समिद्ध से चुन जाने की प्राधिकता है जिसका प्राचल 0 हो।

यदि बटन सतत हो तो उसर लिखे डग से सभाविता फलन की परिभाग हैना क्ष्म है नयोंकि इस स्थिति में प्रत्येक x_1 के लिए $p_1(0) = 0$ । इसलिए सतद बटनी से लिए प्रतिदार के सभाविता फलन को निम्नलिखित रूप में रल सकते हैं।

L
$$(x_1 x_2 - x_n, 0) = f(x_1 0) f(x_n 0)$$
 $f(x_n 0)$ (17.7)
जहाँ $f(x_1 0)$ 0 प्राचल वाली समिष्ट का x_n पर प्रायिकता घनत्वफलन हैं।
इस 0 का पदा चलाने को जिसके लिए प्रतिदर्श का सभाविता कलन यहत्तम हो जाय,

महत्तम सभाविता विधि कहते हैं । इस मान $\hat{\theta}$ का θ के प्रावकलक की तरह उपयोग किया जाता है ।

क्यों कि L पनात्मक है इसिलए log Lका भी परिकलन किया जा तकता है। यह L ना एक ऐसा एकन है जो L के साथ बढता है। इस्तिलए 6 के जिसा मान के लिए L यहना है उसके किए log L भी सहस्ता है। log L का महस्तम मान मालूम करने के लिए हमें निम्मिलिखत समीकरण हक करना पड़ेगा।

$$\frac{\partial \log L}{\partial \hat{\theta}}\Big|_{\theta = \hat{\theta}} = 0 \tag{17.8}$$

इस समीनरण के हरू को हम है का बहत्तन समाविता प्रायक्तक (maximum likelihood estimator) कहते हैं। इस प्रकार के प्रायक्तक के कुछ गुण हैं जिनके कारण इसका विशेष प्रहत्त हैं।

- (१) यदि ० का बोई दक्ष प्राक्तकका है है तो समाविता समीकरण का नेनल एक हुल होगा और यह होगा छै। इस प्रकार यदि कोई दक्ष प्राक्तकक दिवसात है तो इस निधि से उतका पता पत जाता है।
- (२) यदि θ का कोई पर्याप्त प्रावकलक $\hat{\theta}$ है तो सभाविता समीकरण का हल $\hat{\theta}$ का फलन होगा ।
- (३) फुछ प्रतिवथ ऐसे होते है, जो प्राम सभी रामस्टियो द्वारा सतुष्ट हो जाते हैं। इनके अन्तर्भत सभाविता समीकरण का हल सगत होता है।
- (४) बहु वो स्पष्ट ही है कि समामिता समीकरण प्रेक्षित प्रतिदर्श पर आधा-रित है। इसलिए इतका हल एक मान्छिक चर है। बडे प्रतिदर्शों के लिए इसके हल का बटम प्राय प्रसामान्य होता है।
- (4) वह प्रविद्धों के निए यह हुळ सन्म सक्त होका है । यदि \hat{P}_{μ} एक नहत्तम समापिता आववळक है और $\hat{\theta}'_{\mu}$ एक नन्म प्रान्तकळक है की हम एक ऐसी सत्या N मानूम कर सकते हैं कि यदि n > N तो $V(\hat{\theta}'_{\mu}) \leqslant V(\hat{\theta}'_{\nu})$

भाइए, अब हम कुछ प्राचलों के प्रावकलन के लिए इस विधि का प्रयोग करके देखें । तमस्टिमें नेवल दो मान है ० और x जिनकी प्रायिकता क्रमश
 मृ श्रीर p है 1 हम क्रपरिमाण का एक प्रतिदर्श लेते हैं जिसमें rमान x और बाकी (n-r) यून्य है 1 इस प्रतिदर्श के आधार पर p का प्रारक्तन करना है।

$$L = p^{r} (i-p)^{n-r}$$

$$\log L = r \log p + (n-r) \log (i-p)$$

$$\frac{3\log L}{3p} = \frac{r}{p} - \frac{n-r}{i-p}$$

इसलिए सभाविता समीकरण निम्नलिखित है

$$\frac{r}{\hat{p}} - \frac{n-r}{1-\hat{p}} = 0$$
अथवा $r (1-\hat{p}) - (n-r)\hat{p} = 0$
अथवा $\hat{p} = \frac{r}{r}$

(II) समस्टि प्वासो है जिसका प्राचल λ है। हम प्रतिदर्श x_1x_2 x_n द्वारा λ का प्राचकलन करना चाहते हैं।

$$\begin{split} \mathbf{L} &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\mathbf{r}_2}}{x_1!} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\mathbf{r}_2}}{x_2!} \times \\ &= e^{-n\lambda} \sum_{\lambda^{i=1}}^{n} \mathbf{x}_i \end{split}$$

$$\log L = -n\lambda + \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{x_1}^{\top} x_1^{\top} & x_n^{\top} \end{pmatrix} \log \lambda - \log (x_1^{\top} x_2^{\top} & x_n^{\top})$$

सभाविता समीकरण निम्नलिखित होगा

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda}\Big]_{\lambda = \lambda} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i}$$

अववा
$$-n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\lambda}} = 0$$

$$\therefore \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \bar{x}$$

(III) यदि समध्य N (µ,0) हो तो

$$\begin{split} \mathbf{L} & \left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \ \mu, \sigma \right) = \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^n} /_2 \sigma^n}_{} e^{\frac{\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^n \left(\mathbf{x}_i - \mu_i \right)^2} \\ \log \mathbf{L} &= - \cdot \frac{\mathbf{H}}{2} \cdot \log \left(2\pi \right) - \mathbf{H} \log \sigma - \cdot \frac{1}{2\sigma^2} \sum\limits_{i=1}^n \left(\mathbf{x}_i - \mu_i \right)^2 \end{split}$$

$$\log L = - \frac{\pi}{2} \, \log \left(2\pi \right) - \pi \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \mu \right)^i$$

के लिए समामिता समीकरण निम्नलिखित है

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu x_n} (\hat{x}_i - \hat{\mu})$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = 0$$

के छिए सभाविता समीकरण निम्नलिखित है

$$\frac{8\log L}{\partial \sigma} \Big|_{\mu = \hat{\mu}, \sigma = \hat{\sigma}} = 0$$

$$8001 - \frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{l=1}^{n} (x_l - \hat{\mu})^2 = 0$$

$$8001 \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} (x_l - \hat{\mu})^2$$

$$900 \hat{\mu} = \bar{x}$$

$$0 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} (x_l - \bar{x})^2$$

$$0 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} (x_l - \bar{x})^2$$

इस अविम जदाहरण में हम देखते है कि यदि समस्टि में दो या अधिक अज्ञात प्राचल हो तो उन्हें युगपत् (simultaneous) सभाविता समीकरणो की सहायसा से प्राक्तिस्ति किया जा सकता है।

पदि μ झात होता और केवल ०° का प्राक्कलन करना होता तो महत्तम सभा-विता प्राक्कलक निम्नालिखित होता

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i - \mu)^2$$

यह देखा जा सकता है कि महत्तम समाविता प्राक्कलक हमेशा अनभिनत नहीं होता । उदाहरण के लिए

$$E \left(\stackrel{\circ}{\sigma^2} \right) = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^3$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(x_i^2) - E(\overline{x}^2)$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ n \left(\sigma^2 + \mu^2 \right) \right\} - \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \neq \sigma^2$$

§ १७३२ घूर्ण-विधि (method of moments)

किसी समिष्ट के पूर्ण उसके प्राप्तां के फलन होते हु। यदि किसी समिष्ट के श्रमायल 01, 02, 03 हैतो हम निम्मलिखित समीकरणो द्वारा इन प्राप्तां के प्राप्तलनों की प्राप्त करते हैं

moment) है। (देखिए अध्याय २)

यह सिद्ध किया जा सकता है कि जिन प्रतिवधों को प्राय मभी समस्टियौँ सपुष्ट कर देतो है उनके अवनंव इस प्रकार के प्राक्तकरों का बटन वडे प्रतिदश परिमाणी के लिए प्राय प्रसामान्य होता है। यह प्राक्तकर समत भी होते हैं, परंतु हमेशा अन-भिनत नहीं होते। बडे प्रतिदक्षों के लिए यह प्राय दक्ष भी नहीं होते !

व्यक्ति और प्रसामान्य बटनों के लिए तो यह बिधि बहुत ही सरक है बमीकि प्राचल स्वय समित्र के यूर्ण होते हैं। आइए, अब हम एक ऐसी समित्र और ऐसे प्राचल का उदाहरण के जिसके लिए प्राचल समित्र का कोई पूर्ण नहीं होता हो।

मान लीजिए यह समध्य निम्नुलिखित है।

$$f(x,\lambda) = \frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \quad e^{\alpha} \quad x^{\lambda^{1}} \Big]_{0 < x < \infty}^{\alpha > 0}$$

जिसमें λ एक ज्ञात अचर है।

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} e^{x} dx$$
$$= \frac{\frac{\lambda}{\Gamma(\lambda)}}{\frac{\Gamma(\lambda)}{C^{\lambda+1}}} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{C^{\lambda+1}}$$
$$= \frac{\lambda}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{C^{\lambda+1}}$$

.. α के प्रावकलक α° के लिए निम्नहिस्तित संगीकरण है

$$\overline{x} = \frac{\lambda}{\alpha^*}$$

अथवा $\alpha^* = \frac{\lambda}{2}$

इसी भकार धूर्ण विधि से प्राचलों का प्राक्कलन बहुधा अत्यत सरह हो जाता है।

६ १७४ विश्वास्य वतराल (Confidence interval)

जो फलन प्रतिवर्ध के लिए एक अहितीय मान श्रहण करता हो उसके द्वारा 0 का प्रावकत्व करने के स्थान में हुँग एक ऐसे अवराज का भी प्रानक्षण कर सकते हैं जिसमें 0 के होने में प्रायिवनता एक पूर्व-निश्चित सस्था हो। यहिल तरीके को बिंदु-प्रावकत्वन (pomt estimation) और दूसरे तरीके को अतराल प्रावकत्वन (interval estimation) कहते हैं।

मान लीजिए, प्रतिदर्ध x₁, x₂, x₂ ऐसी समिटि से जुना गया है जिसको केवल एक प्राचल है हारा निर्धारित किया जा बकता है। यदि १एक ऐसा प्रतिदर्धन है जो x₂, x₃, x₄ व्या 0 का फल्ट है परतु जिसका बटन 0 से ज्वित है से हम एक मान 4 ऐसा मालून यर वनते हैं पि १ के इससे छोटे होने की प्राचित्वता एक पूर्व-निश्चित सस्या « हो जहां o<< ।

अर्थात्
$$P[t \leqslant t_1] = \alpha$$

अधवा

यह सभव है कि जगमता $t \leq t_1$ को हम एक दूबरे रूप $0 \leq t_1^{\alpha}$ ज्ञयना $0 \geq t_1^{\alpha}$ में रख सकें। उदाहरण के लिए यदि समिष्ट $N(\mu, \mathbf{1})$ हो तो $t = (x - \mu)$ एक ऐसा प्रतिदर्शन है जो x_1, x_2, \dots, x_n और μ का फलन है परतु $(x - \mu)$ का बटन $N\left(0, \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)$ है जो μ से स्वतन है।

$$P\left[t \leqslant \frac{196}{\sqrt{\pi}}\right] = 0.975$$

$$P\left[\overline{x} - \mu \leqslant \frac{196}{\sqrt{\pi}}\right] = 0.975$$

$$P\left[\mu \geqslant \overline{x} - \frac{196}{\sqrt{\theta}}\right] = 0.975$$
(\$\frac{1}{2}\text{first} \text{ first} \text{ first} \text{ first} \text{ first}

साबारणतमा हम ऐसे दो मान ℓ_1^α और ℓ_2^α मालूम करना चाहते हैं कि

$$P\left[t_3^{\alpha} \leqslant 0 \leqslant t_2^{\alpha}\right] = \alpha$$
 (17 10)

कतराल $(f_{\alpha}^{\alpha}, f_{\alpha}^{\alpha})$ को हम θ का विश्वास्य-अतराल (confidence interval) कहें है । जिसका विश्वास गुणाक (confidence coefficient) α है। ज्ञपर के उदाहरण में ।

$$P\begin{bmatrix} x - \frac{1}{96} & \leq \mu \leq x + \frac{1}{96} \end{bmatrix}$$

$$= 1 - P\begin{bmatrix} x > \mu + \frac{1}{96} \end{bmatrix} - P\begin{bmatrix} x < \mu - \frac{1}{96} \end{bmatrix}$$

$$= 1 - P[(x - \mu)\sqrt{\pi} > 1 96] - P[(x - \mu)\sqrt{\pi} < -1 96]$$

$$= 1 - 0 025 - 0 025$$

$$= 0 95$$

मान लीजिए किसी प्रतिदर्श के लिए $\hat{x}=10$ n=4 क्या हम वह सकते हैं कि

$$P[9 \text{ 02} \leqslant \mu \leqslant 10 \text{ 98}] = 0.95$$

इस तरह का बन्तज्य देना अर्थहीन होगा न्योकि प्रायिकता वनत्य किसी यादृष्टिक नर अगना यादृष्टिक घटना के सबध में ही दिये जा सकते है और ऊपर के वनत्व्य में इस प्रकार की किसी यादृष्टिक घटना की कल्पना नहीं की गयी है।

$$P\left[\frac{1}{x} - \frac{196}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \frac{196}{x} + \frac{196}{\sqrt{n}}\right] = 0.95$$
 एक अर्थपूर्ण वन्तव्य है

क्यों कि $\left(\overline{x} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$, $\overline{x} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ एक याद् च्छिक अवराल है जिसमें μ के पाने जाते की प्राप्तकता का कुछ लये है । यदि हम बार-बार इस समिटि में से μ परिमाण के प्रतिकरों के और दम अवराक का प्राप्तकन ऊपर बिये हुए सुन्न द्वारा करें से हम आवा कर समते है कि 95 प्रविकात अवराक ऐसे होंगे जिसमें μ पाया जायना ।

और कैवल 5 प्रतिस्तत अतराल ही ऐसे होगे कि μ उनके बाहर हो ।
क्यों कि हमारा अविवर्ध इस कमिट्ट में से चुना गया है और क्यों कि अतराल का
प्रावकलन इस विदेश विश्व किया गया है, इसिल्ट में विवरास है कि μ इस अतराल में ही होगा। यदि अतराल इस प्रकार के अतरालों से के चुना जाता जिनमें से 90 प्रतिस्ता में ही μ पाना जाता तो भी हमें यह विक्लास होता कि 9 उसी के अवगत है। परतु इस विक्वास की मात्रा अपेक्षाहत कम होती। किसी अपनायी हुई विधि से प्रावक्तिल अंतरालों में 9 के पाये जाने की प्रायंकता को हम इस विक्लास की मात्रा का मांग यान राकते है। इसी कारण इसकी विकास मुचाक कहा जाता है।

प्रयोग अभिकल्पना

भाग ५

Design of Experiment

अध्याय १८

संपरोक्षण (experimentation) में सांख्यिकी का स्थान

 १८१ भौतिकी और रसायन के प्रयोगो मे साख्यिकी का साधारण-सा महत्त्व

विज्ञान का इतिहास प्रयोगा (experiments) और उनके कला को समझने के प्रयत्नो का इतिहास है। विज्ञान की अन्य शाखाओं की अपेक्षा भौतिक और रसायन अधिक पुरातन है । इनमें प्रयोगों की विधि इतनी उन्नत हो चकी है कि साधारणतया प्रयोगों के फलों में कोई निरोप अंतर नहीं पड़ता, बाहे उन्हें कोई भी न्यनित किसी भी स्यान पर और किसी भी समय गयो न करे। यदि कुछ विशेष अंतर गया भी जाये ती उसकी व्याख्या तापमान, वायुदाव आदि मिने चुने उपादानी (factors) द्वारा हो सकती है। ऐसे समीकरण ढँढ निकाल गये हैं जो प्रयोगों के फलो को इन उपादानी के फलन के रूप में व्यक्त कर सकते है । यह सन है कि प्रयोग के फल और इस फलन के मान मे फिर भी कुछ अतर रह ही जाता है। परंतु यह अतर इतना कम होता है कि इसे प्रायोगिक नृटि (obcrvational error) समझ लिया जाता है। इस प्रकार के विज्ञान में अथवा उसके विकास के लिए किये गये प्रयोगों में साहियकी का कोई स्थान नहीं है । हाँ, इसमे गाउस (Gauss) के बुटि-बटन का प्रयोग यदा-कदा कर लिया जाता है । इसके अलावा सास्यिकी के इस सिद्धात का प्रयोग भी बहुधा किया जाता है कि प्रतिदर्श-परिमाण बढने के साथ साथ प्रतिदर्श माध्य का प्रसरण कम होता जाता है। इसी कारण विज्ञान में यह प्रथा है कि एक ही माप में प्रयोग कर्ता सतुष्ट नही होता । यह एक ही प्रयोग के फलो का भी अनेको बार नाप रोता है। प्रयोगों के फलो का विभिन्न उपादानों से सबग स्थापित करने के लिए समीक्रण में इन मापो के माध्य का ही प्रयोग किया जाता है।

६ १८२ विज्ञान की अन्य शाखाओं में सास्त्रिको का असाधारण महत्त्व पर्वाप विज्ञान की इन महत्त्वपूर्ण दाखाओं में सास्त्रिको का कोई विदोप स्थान नहीं है, परत् अन्य विचाणों में विदोपकर प्राणि-विज्ञान और साम्राजिक विज्ञाना में साहितको ने अपने लिए बहुत महत्त्वपूर्ण स्थान बना लिया है । इन विज्ञानो में नियम अधिकतर ययार्थं न होकर सास्यिकीय होते हैं। परतु यहाँ हमें इन विज्ञानो के नियमी अयवा सिद्धातों में कोई दिलचस्पी नहीं है । हम तो यह देखना चाहते हैं कि स्वय सपरीक्षण अथवा प्रयोग-विधि (experimentation) को साह्यिकी ने वहाँ तक प्रभावित किया है । साधारणतया सास्यिक स्वय कोई वैज्ञानिक प्रयोग नही करते, परन्तु फिर भी पिछले वृष्ठ वर्षों में साक्ष्यिको द्वारा सपरीक्षण विधि पर कई लेख व पुस्तकों लिखी जा चुकी है। यह माना जाने लगा है कि वैज्ञानिको की, जी प्रयोग करके उनके फलो का समुचित उपयोग करना चाहते हैं, इस साहितकीय साहित्य से किसी हद तक परिचित होना आवश्यक है । यदि वे इससे परिचित नहीं है या उन्हें विसी विशेष परिस्थिति का सामना करना है तो उन्हें सास्यिको से सलाह टेनी चाहिए । अनुसमानकर्ता प्रयोग-विधि निदिचत करने में और प्रयोग के फलो की व्याख्या करते में सास्यिकी और सास्यिका का सहारा इतना अधिक लेने लगे है कि कुछ दैज्ञानिको की राय में अब यह सहारा उचित सीमा का उल्लंधन कर चुका है और दे उसके उपर रोक लगाना चाहते हैं। यद्यपि हम इन कतिपय वैज्ञानिको से सहमत है कि कदा चित् सास्यिकी का आवश्यकतासे अधिक और अनुचित प्रयोग होने कमा है, परत् प्रयोग अधिकत्पना (design of expenments) में साह्यिकी ने जो स्थान बना लिया है उससे अब उसे हटा देना असभव है।

§ १८-३ परिकल्पना की जाँच और प्राचलो के प्राक्कलन में प्रयोग अभिकल्पना का महत्त्व

यह हुम पहले ही कह चुके है कि शीतिक और रसायन के प्रयोगों के फलों के विपरीत अन्म विज्ञानों में प्रयोग को बार-बार दुहराने पर उसके फल निम्न निम्न होते हैं। 'यह हो ककता है कि यदि उन सभी उपायानों को निचर रखा जाय को प्रयोग पर प्रभाव बालते हैं तो इन फलों में शीलर ने खाये। लेकिन अभी तक न सो पैकानिकों को इन सब उपायानों का लान है और न ही ये आत उपायानों को नियमित करने की किटनाइयों पर विजय प्राप्त कर पाये हैं। यही नहीं, बलिक इनका विज्ञान है कि सब छोटे-छोटे उपायानों के प्रभाव का लान बहुत महत्त्वपूर्ण नहीं होता। अधिक महत्त्व पूर्ण तो यह जानना है कि इन उपायानों का सन्तिय प्रभाव क्या है। कुछ भी हो, मर्स सब है कि इन प्रयोगों की प्रकृति याद्विलक प्रयोगों की सी ही होती है जिनका वर्णन पहिले ही कई बार किया जा चुका है।

हम पिछले कुछ बाज्यायों में यह देश ही चुने हैं कि प्रयोग के फलों की व्यास्था किसी हद तक परिकल्पना की जांच द्वारा किस अकार की जा गकती है। इसी प्रकार हम यह भी देश चुके हैं कि प्रयिद्ध के समिष्टि के प्राप्ते (parameters) का प्रकल्पन (estimation) किस प्रकार किया जाता है। किन्तु अभी तक हमने इस समस्या पर भनी भांति विचार नहीं किया है कि प्रयोग किस प्रकार किये जार्थे अपना प्रतिदर्भ किस प्रचार चुने जार्थे अपना प्रतिदर्भ के साम प्रविद्युक्त की साम प्रकल्प करों के प्राप्तिकता-बटन का जात होना ही प्रयोग की व्यास्था को सभव चुनाता है। यदि एस हम नहीं कर पाये तो कुछ चोट से प्रप्रोग के क्लो के अपना एक प्रतिदर्भ से प्राप्तिक नहीं कर पाये तो कुछ चोट से प्रप्राप्त को से अपना एक प्रतिदर्भ से प्राप्तिक ना नहीं कर पाये तो कुछ चोट से प्रप्ता के प्राप्तिक ना नहीं कर पाये तो कुछ चोट से प्रप्ता के प्राप्तिक ना नहीं कर पाये तो कुछ चोट से प्रप्ता के क्लो से अपना एक प्रतिदर्भ से प्राप्त को लगाना चहुत कहिन हो वायता।

६ १८-४ उदाहरण

मान लीलिए, एक रोग के लिए दो लीपभो की नुजना हम करना चाहते हैं। यिष हम औपभो का सी-सी रोगियो पर प्रयोग किया जाय तो हम जानते हैं कि सरिक्तमना क्या होनी चाहिए और उसकी जर्मन केंक्र करनी होगी। परन्तु इस जांच के लिए डिपद-बटन अपना प्रसामान्य-बटन का उपयोग हम उसी दक्षा में कर मकते हैं जब इस रोगियों को सपूर्ण रोगी-जगत् का प्रतिविध मान लेना किसी हह तक मुस्तवन्त्र हो। यदि इस रोगियों का नुनाव पद्मिन्नक हो तक तो इस बटनों का उपयोग सांगत है ही—हुछ जन्म परिरोधितयों में औ इसे ठेक का का जा स्वता है।

परतु अनेक प्रमोग इस प्रकार किये जाते हैं कि उनसे कोई लाभवायक अनुमान ज्याना मुक्तिल हैं। उबाहरण के किए विदे तभी रोशियों पर एक ही औपय का प्रभोग दिया जाता तो उसके उपयोग को नहीं मालूम दिया जा सकता। अचवा परि क्षी रोगि जिन्हें एक विदेश औपय दी जाग, एक विदेश अस्पताल के हो तथा जव्य परि क्षी रोगि जिन्हें एक विदेश औपय दी जाग, एक विदेश अस्पताल के हो तथा जव्य रोगि किये होने का कारण नेषळ औपय हो। होती। तसका भोजन, जागम नीति के कारण के कि प्रमान के प्रमान करते हों। हो अस्पता अस्पताल के तथा में उसके मोरीन होने का आपना के प्रमान के स्वीर्थ कार्य कार्य कार्य के स्वार्थ के स्वर्ध के स्वार्थ के स्वर्य के स्वार्थ के स्वार्थ के स्वार्थ के स्वार्थ के स्वार्थ के स्व

उपादानो पर निर्भर हो और हम उनमें से नेनरु एक का प्रभाव जानना चाहते हो तो अन्य उपादानो ने प्रभाव से छटकारा पाना आवस्यक हो जाता है।

ऊपर के उदाहरण में दोनो औपघो का प्रमाव जानने के लिए यदि दोनो अस्पतालों से पचास-पचास रोगियों के प्रतिदर्श लिये जायें तो अस्पताल के प्रभावों मे छुटकारा पाया जा सकता है। परतु रोगों के नीरोग होने की प्रायिकता उसकी उम्र और साधारण स्वारव्य पर भी तो निर्भर करती है। यदि भूल से हमारे प्रतिदर्श में एक औपय के लिए अधिकतर रोगी बुद्ध और निवंत हो और जिन रोगियों को दूसरी औषध दी जाय उनमें अधिकतर जवान तथा हुप्टपुष्ट हो तो भी औपध के बारे में अनुमान लगाना कठिन है। हो सकता है कि इन उपादानों के प्रभाव की हटाने के लिए आप प्रतिदर्श का चुनाव इस प्रकार करें कि उम्र का वितरण दोनी प्रतिदर्शों में समान हो। लेकिन किसी रोगी के नीरांग होने अथवा मृत्यु-लाम करने में इतने अधिक उपादानों का प्रभाव पडता है कि उन सबके प्रभावों को बिल्क्ल हटा देना असमन है। कुछ तो यह इस कारण है कि सब उपादान झात नहीं है और कुछ इस कारण कि जात उपादानों की संख्या भी इतनी अधिक है कि उनका नियत्रण करने के लिए भी बहुत बड़े प्रतिदर्श की आवश्यकता होगी। इतने बड़े प्रतिदर्श पर प्रयोग करने के लिए खर्चा भी बहुत अधिक होगा और यह सभव है कि उतना रूपया उपलब्ध ही न हो। और यदि हो भी तो शायद इतने अधिक रोगियो को प्रयोग के लिए ढँढना महिकल हो । यदि रोगी भी मिल जायें तो भी इसने बडे प्रयोग को भली भौति नियत्रित करने में अनेक कठिनाइयां है। यह देखना कि रोगियों को ठीक समय पर औषध दी जा रही है अथवा नहीं, उनके भोजन और आराम आदि की व्यवस्था ठीक है अथवा नहीं, उनका प्रेक्षण करने के लिए प्रशिक्षित प्रेक्षको (observers) को पर्याप्त सस्या मे प्राप्त करना आदि अनेक कठिनाइयाँ है।

🕯 १८५ याद्च्छिकीकरण (Randomization)

यदि प्रयोग छोटे पैमाने पर हो तो उसका नियत्रण कठोरता से हो सकता है। यदि छोटे पैमाने के इस प्रयोग से भी समिष्टि के बारे में अनुसान छगाना सभव हो ठो हम उसमें में प्रयोग को बदाकर अधिक सर्च के साम्यशाब अल्य कठिन समस्याओं को बयो निमन्तित करें? यह स्पष्ट है कि इस छोटे-से प्रयोग हारा हम सब उपादानों के प्रमान को पूरी तीर से हटा नहीं सकते, परन्तु इनके कारण प्रयोग में यो अभिनित (bias) आ सकती है उससे धचने के रुपए एक तरफीन है।

इरा तरकीय का नाम है "यावुच्छिकीकरण" (randonuzation) जिसका आविष्कार प्रोफेसर रोनास्ड ए० फिशर ने किया था । इसके अनुमार कौन-सी औपप किन रोगियों को दी जायगी, यह एक यादि च्छक प्रयोग द्वारा निश्चित किया जाता है । उदाहरण के लिए हर एक रोगी के लिए एक सिक्का उछालकर निश्चित किया जा सकता है कि उसे पहली औपध दी जाय या दूसरी । इसका फल यह होता है कि बोनो औपभो को अधिक पद्ध अथवा अधिक हुप्ट-पूज्ट रोगियो का इलाज करने का बराबर मौका मिलता है। यह हो सकता है कि किसी विशेष बाद ज्लिक प्रयोग के फलस्वरूप एक औपघ के लिए परिस्थित अनुकुल हो और दसरी के लिए प्रतिकल हो, क्योंकि रोगियों के दोनों समह बिलकुल एक समान तो हो सकते नहीं । लेकिन यह अतर जितना होता है उसका विचार पहिले ही परिकल्पना की जांच और विश्वास्य सीमाओं के परिकलन में कर लिया जाता है । प्रयोग की अधिकल्पना में ऐसी बहत कम विशेपताएँ है जो बास्तव में आधनिक है। इन कुछ विशेपताओं में यादिएछरी-करण एक है । यादन्छिकीकरण का किस स्थान पर किस प्रकार उपयोग किया जाय यह बहुत कुछ प्रयोग करनेवाले की विवेक-बृद्धि पर निर्भए करता है । ऊपर के उदाहरण में यह काफी है कि कुल रोगियों में से आधे का यादन्छिक चनाव किया जाय जिनको पहली औषध देनी है और बाकी रोगियो को दूसरी दवा देवी जाय। इस विधि में हर एक रोगी के छिए इन दो दवाओं द्वारा इलाज करवारे जाने की प्राधिकताओं को बराबर होना चाहिए । कई अन्य प्रयोगो में — उदाहरण के लिए मनोवैज्ञानिक प्रयोगों में--कई ऐसी कियाएँ होती है जो अभिनति का कारण हो सक्सी है । बहुधा जिन व्यक्तियो पर ये प्रयोग किये जाते हैं उनमें ही अन्तर पर जाता है। वे प्रयोग के दौरान में कुछ अधिक सीख जाते है अयवा यकान के कारण उनकी कार्य-दक्षता में अन्तर आ जाता है। ऐसी व्यवस्थित अभिनति से बचने के लिए ग्रादिच्छिक्तीकरण का उपयोग किया जाता है। अन्य कठिन अवस्थाओं में यादच्छिकीकरण का एक ही प्रयोग में बार-बार उपयोग करना पढ़ सकता है ।

कई बार हमें विश्वास होता है कि किस सार्विक्वनीक रण के कोई विशेष अधिनीति नहीं होंगी चाहिए । इस पर भी यह जीवत है कि इस सास्विकीय किया के करने का कर अध्या जाव । इसके द्वारा प्रतीमकर्ती अपोधीत धटनाओं से प्रयोग के वेकार हो जाने की समानना को दूर कर सकता है । किसी विश्वेष प्रयोग में इतनी अधिक जिन्मों के स्वार्ण में इतनी अधिक किया हो। किसी विश्वेष प्रयोग में इतनी अधिक किया है। अध्या किया के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के स्वार्ण के और वदानिक् उससे स्वार्ण का स्वार्ण के स्वार्ण के और वदानिक् उससे दिवस स्वार्ण के स्वर्ण के स्वार्ण में प्रयोगकत्तां को निश्चय करना पड़ता है कि कौन-सी कियाएँ अभिनति के दृष्टिकोण से अधिक महत्त्वपूर्य है और यादृष्टिकोकरण को केवल इन कियाओ तक ही सीमित -रखना पड़ता है ।

\$ १८.६ नियत्रित यादृच्छिकीकरण

यद्यपि इस याद्ध्यिकीकरण से अभिनति का परिहार हम कर सकते है, फिर भी किसी औषध को विशेष सुविधा(advantage)मिलने की सभावना को पूर्णतया समीग पर छोड़ना बढ़िमानी नहीं है । कम से कम कुछ उपादानों के प्रभाव को दोनों औपभो के लिए बरावर-बरावर बॉटने की चेप्टा हमें अवस्य करनी चाहिए । जैसा कि हम पहिले विचार कर चुके हैं, दोनों अस्पतालों में बराबर-बराबर सस्या के रोगियों को उन होनो प्रकार की औपकों का दिया जाना अधिक उचित जान पहला है । यदि हो सके तो रोगियों के उन दोनो बगों में—जो इन दो दवाओ का सेवन करने के लिए चुने गये हो-उन्न का वटन और स्वास्थ्य की स्थिति एक समान कर देनी चाहिए । यद्यपि केवल इन्ही दो उपादानों के प्रभाव से बचाना ही काफी नहीं है तथापि शायद कुल उपादानों के सम्पूर्ण प्रभाव का एक बहुत बड़ा भाग इन्हींके कारण है । हम पूर्ण विश्वास के साथ इनको नियत्रित करने का जिम्मा सिर्फ सयोग पर नहीं छोड सकते । इसके लिए हमें अन्य तरीके अपनाने होगे । दूसरी ओर आपने शायद यह भी सोचा हो कि परिकल्पना की जाँच के लिए आवश्यक है कि प्रयोग के फल मादृष्टिक चर हो और इस कारण यादृष्टिकीकरण का सर्वया त्याग उचित नहीं है । ऐसा करने से सपूर्ण प्रयोग के नृथा हो जाने की सभावना है । ऐसी दशा में क्या करना चाहिए? इस समस्या को मुलझाने के लिए बहुत सारूपकीय ज्ञान की आवश्यकता नहीं है। यदि आप व्यानपूर्वक इस पर विभार करें तो समस्या को मुलझा सकते है। यद्यपि इस के कई हुछ हो सकते हैं, परन्तु उनमें से एक निम्नलिखित है।

दो-दो रोनियों के अनेको युग्म (pairs) बनाये जा सकते हैं जिसमें दौनों रोगो जहां तक इन उपादानों का सबय है, एक समान हों। यदि औपियारी A और B हो तो हमें इनमें से एक युग्म के लिए यह निर्णय करता होता है कि किस रोगों को A और किसको में दो जाय। यह एक याद्विक्त प्रयोग द्वारा—उदाहरण के कि उपाद के को उक्तकर—किस जा सकता है। इस फकार हम इन उपा-दानों को नियंत्रित भी कर लेते हैं और याद्विक्तकोकरण के उपायोग द्वारा अभिनति का परिहार मी हों जो वा दि दो न होकर औषियारों की संख्या महों जो

हमें कुछ रोगियो को ऐसे कुछका (sets) में बॉटना होगा जो कुछ महत्त्वपूर्ण उपादानी की दृष्टि से समाग हो और प्रत्येक कुछक में रोगियो की सख्या 🛭 हो ।

५ १८.७ ब्लॉक

प्रायोगिक इकाइयो के इन मुख्को को — जिनमें विधिन्न जपवारों (treatments) को एकाइयो में माद्गिककोक एक द्वारा वांटा जाता है — साव्यिकीय मापा में कर्षों (block) कहते हैं। इरामा कारण जह है कि प्रयोग की अधिकरणना के साव्यिकताय सिद्धातों का भाविष्कार आरम्म में कृषि सबसी प्रयोगों के किए ही किया गया था। वनमें यह कुक एक सहत मुबब (compart piece of land) होता है जिसे अपेशी में अक्सर क्लॉक भी फहते हैं। इसी प्रकार अन्य अनेक पारिमाधिक शक्य जिला प्रयोग की स्वाधित हैं। प्रस्तु अधिका प्रयोग-अभिकरणना साहित्य में उपयोग होता है — कृषि से सबधित हैं। प्रस्तु अप तक आप यह तो समझ ही चुके हैं कि इन विद्वारों का उपयोग कृषि-विज्ञान में ही नहीं विरुप्त प्राणि-विज्ञान, मनीविज्ञान और सामाजिक-विज्ञान के प्राप्त सभी प्रयोगों में होता है।

१८.८ प्रयोग आरम करने से पूर्व योजना की आवश्यकता

सह बहुया देखा लाता है कि बेजानिक प्रयोग के लिए योजना बनाते समय साधिकतों से सलाह लेने की आवस्यकता नहीं समसी जाती । जब ने प्रयोग कर मुद्देत हैं तो सलिए आंकड़ों को साधिकां के सामने रखकर कहते हैं कि जाए जरा इनका जिरलेपण और व्यास्था तो करसीजिए। साधिकर प्राथ किसी विज्ञान में विशेष यक्ष नहीं होता और इसलिए उसे यह जानता आवस्पक हो जाता है कि प्रयोग किस उद्देश्य से किया बया था। इसके बलावा प्रयोग में जो विधि अपनामी गयी भी उसका जानना भी आवस्यक होता है। साध्यक्त चेट्टा करता है कि प्रयोग के उद्देश की किसी प्रकार साधिक्षिय परिकल्पना के एवं में रख सके। किर उसे यह देखना होता है कि प्रयोग के लिए जो विधि अपनामी गयी है उसके द्वारा इस परिकल्पना की जीव होता कही तक समय है।

पुछ उत्साही जन प्रयोगों को बिना पूरी तरह योजना बनावें ही आरम्भ कर देतें हैं। बाद में उन्हें यह मालूम होता है कि जिल्ल प्रकार प्रयोग किया गया है उससे उहेंत्य-पूर्वि नहीं होती। बच्चा प्रयोग में प्रसिद्ध परिमाण देखा कम था कि उसके आगर पर किसी निवेचत परिणास पर पहुँचना समझ नहीं। कई बार प्रतिदर्ध परिमाण इनना अभिन होता है कि उससे यहत कम में ही काम चक्र सकता था। इन स्व दसाय में प्रयोग में रुगाये हुए घन और समय का अपव्यय होता है । यह कही अधिक अच्छा हो यदि सास्यिक की सलाह योजना बनाते समय ही के छो जाय । ऐसी अवस्या में वह यह आदवासन दे चनता है कि प्रयोग के उद्देश्य में सफलता मिलने की सभावना है अथया नहीं ।

१८९ प्रयोग की योजना बनाते समय तीन वातो का व्यान रखना होता है

- (१) प्रयोगका उद्देश्य क्या है ?
- प्रायोगिक इकाइयां क्या है न प्रयोग किस प्रकार किया जा रहा है और प्रयोग में प्रतिदर्श-परिमाण क्या होगा ने
 - (३) प्रायोगिक फलाका विश्लेषण किस[े] प्रकार किया जायगा[?]

६ १८१० प्रयोग का उद्देश्य

किसी भी प्रयोग का उद्देश्य एक या अधिक प्रतिदर्शों के आधार पर समस्त्रि के बारे में जान प्राप्त करना अथवा उससे सविधत कुछ कथनों की सत्यता की जॉन करना होता है। साल्यिक को यह मालूम होना चाहिए कि वह कीन-सी समस्त्रि है जिसके बारे में बैतानिक जान प्राप्त करना चाहता है। मान की प्रिष्ठ कि एक प्राप्त का उदेश माने के किए विकास का को के प्रयाद का पता कराना है। परस्तु पर उदेश सुस्यस्त्र नहीं है। मेहें केनक एक ही प्रकार के नहीं होते। वे कई प्रकार के होने हैं। यह जानना आवश्यक है कि प्रयोगकर्ता किसी विशेष प्रकार के मेहें पर जानों के प्रभाव का अध्यम करना चाहता है अथवा साधारणत्या सभी प्रकार के मेहें पर। इसी प्रकार करना चाहता है अथवा साधारणत्या सभी प्रकार के मेहें पर। इसी प्रकार करना चाहता है अथवा साधारणत्या सभी प्रकार के मेहें पर। इसी प्रकार करना चाहता है अथवा साधारणत्या सभी प्रकार होता है। बे जान पर प्रकार के प्रवेश में बेकार भी ही सकती है। इस करना यह जानना भी जरूरी है कि प्रयोगकर्ता की ही बकती है। इस करना यह जानना भी जरूरी है कि प्रयोगकर्ता की ही बकती है। इस करना यह जानना भी जरूरी है कि प्रयोगकर्ता के फलो की प्रभावित करने नोता है। में सी पर सी ही सकती है। इस मालून हो जानता है। यह मालून हो जानता है। यह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। अप मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। अप मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो जानता है। सह मालून हो सालून हो हो सालून हो सालून हो सालून हो हो सालून हो सालून हो सालून हो सालून हो सालून हो सालून हो सालून हो हो सालून हो सालून हो सालून हो सालून हो हो सालून हो हो हो सालून हो हो सालून हो हो सालून हो हो सालून हो हो सालून हो हो सालून हो हो सालून हो हो हो सालून हो हो सालून हो हो हो हो सालून हो हो हो हो है सालून हो हो है सालून हो हो ह

यदि उद्देश्य बहुत महत्त्वाकाक्षायुक्त नहीं है—यदि किसी साघारण समीट के जिए किसी एक कथन की पुष्टि अथवा उसका खडन करना हो तो तुलनात्मक दृष्टि से काफी छोटे प्रतिदर्ध को लेकर ही प्रयोग किया जा सकता है। यदि प्रयोगकर्ता बहुत महत्त्वाकाक्षी है तो समन है कि उसकी आकाक्षा वर्षों प्रयोगकरने पर भी पूरी नहीं। समर्पट के बारे में फैंग्यला हो जाने पर यह जानना आवश्यक है कि वह कथन नमा है जिसकी पुष्टि अववा खटन करना प्रयोग का उद्देश है। कुछ कथन ऐसे हीते हैं जिनती पुष्टि करना अथवा जिनका खडन करना स्पोगो द्वारा असनन है। इस प्रकार के कथन अधिकतर महत्त्वहीन होते हैं। यदि वे महत्त्वपूर्ण हो भी तो वहुमा प्रयोगकर्ता अथवा नाश्यिक के गास उनकी आंच करने का कोई साकन नहीं होना।

ऊपर के जदाहरण के लिए कायन जिम्मालिकत हो सकता है। "लाद A मेहूँ की मतल के लिए अग्य खादा की अधेता अधिक जच्छी है।" प्रश्न यह ठठता है कि यह फित बृट्टिकोश से अच्छी है? वया उसके कारण कुँ ही प्रवास अधिक होती है? क्या उसके कारण मेहूँ के पीयो में बोमारी से बचने की शक्ति बढ़ती है? क्या उसके कारण मेहूँ की पीटिकता (food value) बढ़ जाती है? क्या उसके कारण मेहूँ की कसल जल्दी तैयार हो जाती है? प्रयोग का उद्देश्य इनमें ने एन या अधिक प्रश्नों मा उसर प्राप्त करना हो सकता है, परंतु श्रोंकना के लिए इसका स्पट-त्या जानमा जावश्यक है। इसके जलायां से क्यन इस प्रकार के होने चाहिए कि उन्हें एक साध्यिकीय परिकल्यना के रूप में रखा जा सके।

🞙 १८११ प्रायोगिक उपचार (Experimental treatments)

उरबारों से हमारा तारपाँ यहां जा विविध क्रियाजों से है जिनके प्रभाव की नापना कीर उनकी पूक्ता फरणा प्रयोग का उद्देश्य होता है। इन क्रियाओं की मली-मांति स्वास्त्र फरणा काल्यक होता है। इन से वह भी जानना चाहिए कि प्रयोग का उद्देश्य केवल सबसे प्रमावचाली साम्र का पता ब्लाला है ज्यवत यह साल्य करता है कि इन साल्य करता है कि इन साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य की साल्य करता है कि साल्य की साल्य करता है कि साल्य करता है कि साल्य की साल्य करता है कि साल्य करता है क

९ १८ १२ वहु-उपादानीय प्रयोग (Factorial experiments)

हम पहिले ही वह चुके हैं कि हमें यह जानना बावश्यक है कि किस उपादान के प्रभाव को हम नापना चाहते हैं । बूसरे उपादाना के प्रभाव को हम स्थिर रख सकरो हैं । परतु यह तभी ठीक होगा जब इन उपादानों के प्रभाव संयोज्य (additive) हों। यदिएसाहोतो यह निविचत व रते में बुछ भी विजाई नहीं पड़ती कि अन्य उपा-दानों को ियस मान पर स्थिर रखा जाय। परतु यदि यह प्रभाव सघीश्य नहीं है तो किसी विदोप उपादान का प्रभाव उन मानो पर भी निर्भार हो सनता है जिन पर अन्य उपादानों में अचर रखा जाता है। ऐसी स्थित में इस विवोध उपादान के प्रभाव को अन्य उपादानों से नम से कम हो विजिश्व मानों पर नापना ठीक समझा जाता है। इस प्रकार के प्रयोग में हम न केवल इस विद्यास्त्र अववब या उपादान के बिल्क अन्य उपादानों के प्रभाव को भी नाथ सकते हैं। इस प्रकार के प्रयोग को वहु-उपादानीय प्रयोग (factorial experiments) कहा जाता है। आने कन्यर हम इस प्रयोगों की विधि और उनके विकरिष्ण पर विस्तारपूर्वक विचार करेंगे।

९ १८.१३ नियत्रण इकाइयाँ (Control units)

कई बार ऐसा होता है कि जिन इकाइयों पर प्रयोग किया जाता है उनकी किसी विशेषता के कारण प्रयोग ध्यर्थ हो जाता है। उदाहरण के लिए एलोपैथी और होमियोपैयी की सुलना को ही लीजिए। आपको शायद पता होगा कि कई शारीरिक रोग केवल मनोदशाजनित अथवा मन शारीरिक (psychosomatic) होते ह । उनका कारण कोई भौतिक पदार्थ, रसायन, विष अथवा कीटाणु नहीं होता । यदि रोगी को किसी वजह से यह स्याल हो जाय कि उसका स्वास्थ्य ठीक नहीं है तो उसकी यह मनोदशा ही रोग का कारण बन सकती है। यदि रोगी को पता न लगे और वह यह समझे कि उसे कोई बहुत गुणकारी औषध दी जा रही है तो केवल आटे की गोलियो अथवा शुद्ध जल से भी उसका इलाज हो सकता है । ऐसे रोगियो का यदि एलोपैयी अथवा होमियोपैयी द्वारा उपचार किया जाय द्यो उसका फल इस पर निर्भर करेगा कि रोगी को इनमें से किस पर विश्वास है। आरम्भ में यह पता लगाना कठित है कि रोगियों में से वे कीन से है जिनका रोग मन बारीरिक है। ऐसी दशा में यद्यपि हमारा उद्देश्य केवल होमियोपैथी और एलोपैथी की तुलमा करना है, तयापि हमें यह आवश्यक हो जाता है कि कुछ रोगियो पर इन दोनो में से किसी भी इलाज का प्रयोग नहीं किया जाय, बल्कि आटे की गोलियों जैसी निर्चक दवाई इस्तेमाल की जाय। इस प्रयोग से हम मन आरीरिक रोग से पीडित रोगियो के अनुपात का अदाजा लगा सकते हैं। इस प्रकार एक निरर्थंक उपचार के प्रयोग से प्रयोग निरर्थंक न रहकर सार्थक हो जाता है। इस प्रकार की इकाइयो को-जिनपर निर्थंक उपचार किया जाता है--नियत्रण इकाइयाँ (control units) कहते हैं।

१ १८ १४ प्रयोग-अभिकल्पना का एक सरल उदाहरण

यद्यपि वैज्ञानिक अनेक वर्षों से प्रयोग करते जा रहे है, परतु उनकी अभिकल्पना और विकरण मुंति का केत है भीन रोताव्ह एक किस्तर को । अपनी (Design of Experiments) नाम की पुस्तक में उन्होंने अभिकल्पना के सिदालों से परिचित होने के लिए एक कल्पित, परतु बहुत ही दिल्लाक्स प्रयोग का उदाहरण बिया है। सान्यिकीय गाहित्य में यह उदाहरण बहुत भीति हो भाग है और कुछ अन्य सान्यिकीय गाहित्य में यह उदाहरण बहुत भीति हो भाग है और कुछ अन्य सान्यिकों में भी इसी उदाहरण की लेकर प्रयोग-अभिकल्पना की व्याक्या की है। आगे इस कल्पित प्रयोग का सक्षेप में वर्षों क्यां मां है।

६ १८ १४ १ प्रयोग का उद्देश्य

एक महिला का यह बावा है कि वह चाय को चखकर यह बता सकती है कि प्याले में पहिले चाय डॉली गयी थी अथना दूध । हम ऐसी प्रयोग-अमिकल्पना की समस्या पर विचार करेंगे जिसका उद्देश्य इस कथन की सचाई जीवना है ।

🕈 १८१४२ प्रयोग-विधि

हमारा प्रयोग निम्निलिखत है। कुल आठ प्याले नाय बनायी जाय जिसमें से नार प्यालों में पहिले नाय और जन्म में पिहले दूब बाला जाय। इन प्यालों की मिहला को एक याद्विकत कम ते दिया जाय और वह पत्यलप यह बताने को पेच्टा करें कि कीन-सा पदार्थ पहिले डाला गया था—दूष या नाय। महिला को यह पहिले से बता विया जाय कि प्रयोग में नार प्यालों में दूध पहिले और बार प्यालों में बाद में बाला गया। है।

१८१४.३ अस्वीकृति प्रदेश और प्रतिदर्श परिमाण का निरुचय

यह मालूम हो जाने के बाद स्वाभाविक ही है कि वह इन आठ प्यालों को चार चार के दो कुलको में इस प्रकार विभावित करने की चेट्या करेगी—एक में वह प्याले जिनमें दूप पहिले डाला गया है और दूसरे में वे जिनमें बाद में डाला गया है।

आठ वस्सुओ में से चार वस्तुयों के कुल $\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$ मचय बनाये जा सनते हैं। यदि गहिन्छा दोनों तरह के प्यालों में प्रभेद नहीं कर संकृती

स चय वनायं जा सन तेहें । यदि गहिला दोनों तरह के प्यालो में प्रभेद नहीं कर तकती तो उसके लिए अदाज से इनको दो कुलको में ठीव-ठीक वॉटने की प्रायिकता _{गाँठ} है। प्यालों की सस्या बडाने से यह प्राधिनता और कम हो जाती है। इसने निपरीत यदि प्याला की सस्या को और छोटा कर दिया जाता वो यह प्राधिकता इंतनी अधिक होती कि प्रयोग के फुछ को—यदि प्याला का प्रभेद ठीक भी हो गया हो—समेग जितत माना जा सकता था। उदाहरण के लिए यदि केवल चार प्याले होते तो अदाज से उन्हें दो सही सचया में बाँटने की प्राधिनकता $\frac{1}{(4)} = \frac{1 \times 2 \times 1}{4 \times 4} = \frac{1}{6}$

होती ।

प्रयोगकर्ता को पहिले ही यह निरचय कर लेना चाहिए कि वह बया सच्या है जिससे कम प्रयोग के फल की प्रायिकता होने पर उसे विश्वास हो जायमा कि ऐसा कैवल सयोग से मही हो सकता । इस प्रकार के प्रयोग से बया लग्भ जिसके किसी भी फल से उसे सतीय मही। बर्सियह यह सोचता है कि के फल जिनकी प्रायिकता पाँच प्रतिचठ ज्या उससे भी अधिक है किसी भी निरक्ष पर पहुँचने के लिए बेकार है तो उसके किए आठ से कम प्रयालों में प्रयोग करमा निर्यंक है।

प्यालो की कोई भी सच्या सयोग के प्रकाय से हमें पूर्णतथा नही बचा सकती । हम केवल इस मुविधाजनक नियम को मान लेते हैं कि यदि किसी घटना की प्राधिकता सत्तर में एक है तो वह साख्यिकीय विचार से क्षार्थक है। आप यह तो समझ ही गये होंगे कि किसी एक प्रयोग से, चाहे उसका पाल कितना ही साधक क्यो नही, हमें दूर्ण विवास नहीं हो सकता। इस लाख में एक की प्राधिकता होने पर भी निश्चय ही वृद्ध पटना कभी न की घट हो सकती है। यह हो सकता है कि हमें आहचये ही कि ऐसी असमाबी घटना हमारे ही प्रयोग में क्यो हुई।

यदि हम किसी प्राकृतिक घटना को प्रयोग द्वारा प्रमाणित करना बाहते हैं तो इक्के-युनके प्रयोग इसके लिए काफी नहीं है। इसके लिए भरोसा करने लामक एक विरोप प्रयोग-त्रिकि की आवश्यकता है। मान लीजिए कि हमारे प्रयोग में महिला आठ में से छ प्यालो को ठीक-ठीक पहचान लेती है। यदि महिला में प्रभेद संकित नहीं हो वो दस यटना की प्रायिकता $\binom{4}{1} \binom{4}{1} = \frac{16}{1}$ है। यह प्रयुट

्रि/६/ 2/ 70 है कि यदि इस घटना को सार्थक समझा जाता है, तो सही प्रभेद को तो सार्थक मानना ही पडेगा। इस प्रकार इस घटना अथवा इसमें अधिक सार्थक घटना के घटने की

प्रापिकता $\frac{17}{70}$ है। यह बहुत अधिक है। इस कारण इस प्रयोग में केवल एक घटना

है जो साख्यिकीय दृष्टिकोण से सार्वेक है और वह है महिला द्वारा प्यालो का शत प्रति-शत राही प्रभेद ।

६ १८ १५ निराकरणीय परिकल्पना को सिद्ध नहीं किया जा सकता

इस प्रयोग में निराक्तरणीय परिकल्यामा यह है कि महिला में अभेद अस्तित अनु-सिंद्य है। यह आपको बाद हो होगा कि अमेग द्वारा निराक्तरणीय परिकल्यमा को सिंद्य नहीं नित्या जा सकता—हाँ, उक्का असिंद्य (disprove) होना समय है। यह तक्ते रखा जा सक्ता है कि मदि हामारा प्रयोग इस परिकल्यमा को आंद्रद कर देता है कि महिला में अभेद समित नाही है, तो इसके डारा एक क्यियोग कल्यमा यह भी सिंद्य हो सकती है कि महिला में अभेद समित विचयान है। परतु यह विगरीत कल्यमा एक निराकरणीय परिकल्यमा का स्थान महिण कही कर सकती, स्थिति यह सी अमेन-रित्य हो रह जाता है कि विचयान प्रभेद समित कितानी है। निराकरणीय परिकल्यमा का पूर्णत निरिक्षण (exact) होना आवदक है, क्योंकि इसके आधार पर ही प्राप्तिकत जो गएनका की आरोह है।

१८१६ भौतिक स्थितियो पर नियत्रण की आवश्यकता

अब हमें यह देवाना है कि विस्त दया में यह कहा जा सकता है कि वर्षि महिला में प्रमेद सिंद नहीं है तो प्रमीम के एक केवल मामेग पर निर्मेद होंगी । मान क्षीजिए, उन स्व प्यालों में जिनमें पहले दूग दाला जाता है, टो-दो चम्मच चीनी पढ़ी हो, जब कि जाय प्यालों में जिनमें अकर के प्रालों में प्रमेद कि तर के प्रालों में प्रमेद करना बहुत ही आसान हो जायगा, वर्गीक यह दस्त का सेव कियों भी मनुष्य ब्राय जासानी से पहलाना का करता है। इस प्रकार चार-चार प्यालों के के हुक्क मा दो सब दी कियों का सहस के स्व कियों में प्रमुख्य बाय का सामें में पहलाना का सहस के स्व कियों में प्रकार का सामें कि स्व माना मही होगी। अस प्रयोग में अन्य भीतिक स्थितियों पर विस्ववण प्रवान भी आवश्यक है।

§ १८१७ प्रयोग को अधिक सुम्राही (Sensuive) बनाने के कुछ तरीके

जब यहि महिला का क्यन यह नहीं है कि वह हमेशा दो तरह के प्यालों में प्रमेद पर चक्की है, बिक्क केवल धह है कि अविध कभी कभी उससे मुळ हो सकती है तथापि अधिकतर वह प्यालों को ठीफ क्ष्मणन सकती है। इस दशा में उसको अपने बचन की समाई का प्रमाण देने के लिए अधिक विस्तृत प्रयोग की आवस्पनता होंगी।

यदि प्रयोग में कुछ बारह ध्याको का उपयोग किया जाय, जिनमें दोनो प्रकार के

 \Box -छ प्यांते हों तो बिलकुल ठीक प्रभेद परने की प्राधिवता $\frac{1}{\binom{1}{4}} = \frac{1}{924}$ है। 10 के ठीक और दो ने गलत पहचाने जाने की प्राधिकता $\binom{6}{1}\binom{6}{12} = \frac{36}{924}$ है। क्योंकि $\frac{37}{924} < \frac{1}{20}$ इसलिए प्रयोग का यह फल भी सांस्थिकीय दृष्टिकोण से सांयंक पाना जा सकता है। प्रयोगों के परिपाण को आधिकाधिक बढ़ाने से वह निराक्तरणीय परिकल्पना से प्राप्त तथा बास्तविच प्राधिवताओं के सुक्षतर अंतर की पहुंचानने योग्य होता जाता है।

सूक्ष्मतर अंतर को यहचानने का एक और तरीका यह है कि छोटे प्रतिवर्ध-परिवाण के प्रयोगों की ही कई बार दुहराया जाय । यदि आठ प्याकों के प्रयोग की ही अठ बार दुहराया जाय । यदि आठ प्याकों के प्रयोग की ही अठ बार दुहराया जाय और इंचमें छे दो बार भी महिला ठीक प्रभेव कर पाये, तो इस परना की बौर इससे भी आधिक सार्थक घटनाओं की प्रायिक्ता $z - \left[{c \choose 2} \times \frac{7}{70} \times {c \choose 2}^9 \right]^9$ है जो गांच प्रतिवात से कम है । इस कारण इस फल की भी

सार्थक माना जा सकता है।

प्रयोग को विस्तृत करने के अलावा उसे अधिक सुवाही बताने के अन्य उपाय भी हैं। उदाहरण के लिए हर एक प्याले के लिए हम स्वतन रूप से यह तम कर सन्ते थे कि उसमें दूस पहले डाला जाव या चावा। इसमें यह निवचण उठा लिया गया है कि उसमें दूस पहले डाला जाव या चावा। इसमें यह निवचण उठा लिया गया है कि उसमें वह निवचण को महिला के पात भेजने से पहले होगी और सार में यूष। हर एक प्याले को महिला के पात भेजने से पहले सिका उडालकर दूस या चावा के सबब में निक्चम किया जा सन्ता है। यदि महिला में पेमरे शक्ति तही है वो इस प्रकार भेजे हुए प्यालों को ठीक और एक पहचानने की प्रायक्त को ठीक और एक

को गलत बताने की प्रायिन दा $\frac{8}{256}$ == $\frac{1}{32}$ है जो पांच प्रतिशत से कम है। इसिएए सह घटना भी साध्यिकीय दृष्टिकोण से सार्थक है। इस प्रकार प्रयोग विधि को बदल देना कई बार कामदायक होता है, परतु इस विशेष प्रयोग में इस नूतन विधि का उप-योग कई बार गळवडी पैदा कर सकता है। यह समय है कि इस विधि के कलदक्ष आठो प्याले एक ही प्रकार तैयार किये जायें। इस प्रकार के प्रयोग से जिस ब्यक्ति पर यह प्रभोग किया जा रहा हो उधका पबरा उठना स्वामाधिक है। इसके अलावा यह हो सकता है कि बंदि वह दोनो प्रकार की नाम नक्ष तो अंतर को पहुनान सकता है। परतु पदि सब प्यालों में एक ही प्रकार नाम बनायी जाय तो उसके पास इस अंतर को रहवानने का कोई तरीव रही गई। यह जाता।

अपर के प्रयोग पो ध्यावस्था से आप प्रयोग-विरागण, याद्षिक्किकरण तथा प्रयोग की निवज्ञण में रखने को आवश्यक्ता तथा महत्त्व समझ गये हांगे। हमें कई इससे भी अधिक जटिक प्रयोगी का विश्वेषण करना होता है, जिनमें प्रायिकता इतनी सरकता से पिराजिल नहीं हो सकती। इस काम के लिए कुछ अन्य सिद्धानों की आवश्यकता होती है जिनको हम अगले कुछ अध्यायों में समझाने ना प्रयत्न करेंने।

अध्याय १९

प्रसरण-विश्लेपण

(Analysis of Variance)

६ १९१ एक प्रयोग

मान लीजिए कि एक कारखाने में रबर के दुकड़े बनते हैं। विभी विधीय कार्य के किए उनकी लबाई एक निश्चित थान के लगभग होनी चाहिए। इन दुकड़ों की श्रीस्त लबाई नाभने के लिए एवं प्रेसक रखा गया है। यह स्पट्ट है कि प्रेसक यशि हुए एक दुकड़े को नाभ तो बहुत अधिक नमय लगेगा। इसिलए वह कारखाने में को हुए एक दुकड़े को नाभ तो बहुत अधिक नमय लगेगा। इसिलए वह कारखाने में को हुए रबर के दुकड़ों के एक प्रतिवर्ध की लेकर उसी की लबाई नाभेगा। इसके अलाव एक ही दुकड़े की लवाई मी यदि बार-बार नाभी जायतो फल हमेरा एक-सा नही होगा। कुछ तो इस कारखा कि मामनी (scale) के दो विभावनों के बीच में होने पर प्रेसक की अनुमान लगाना पढ़ता है। इसके जलावा दवर की लवाई नो नामने के लिए उसे जीकर रखना पढ़ता है। इस चिचाब हे भी लवाई में अतर पढ़ सकता है और पढ़ि प्रोसी बार-बार किया जाय तो विचाब हो भी लवाई में अतर पढ़ सकता है और प्रदि प्रयोग बार-बार किया जाय तो विचाब हु सार विलक्ष ल एक-सा नहीं होगा।

इस प्रकार यदि एक प्रतिवर्ध से इकडो की औसत कबाई का अनुमान कराया जाता है तो उसमें थे। प्रकार की जुटियों का प्रभाव पड़ेगा। एक तो भिन्न मिन्न टुकडों की कबाई में अतर के कारण और इसने एक ही टुकडे की कबाई के नापने में प्रैक्षण जुटि (observational error) के कारण। इसी प्रकार कमान सभी प्रयोगों का एक अनेक उपादानों पर निर्मेर करता है। कई बार प्रयोग का उद्देश्य यह जानमा जीता है कि किसी विरोध उपादान का कोई प्रभाव है या नहीं।

\$ १९ २ प्रसरणों का सम्रोज्यता गुण (Additive property of variance) उत्तर के प्रयोग में टुकडों की प्रेसित छवाड़यी यादृष्टिक चर है। मान लीजिए कि कुल रे टुकडों का प्रतिदर्ध बुना गया है। इनमें से 1-बे टुकडों की छवाई को हम 1, से सुचित करेंने। यदि समस्ति के कुल टुकडों की जीवत छवाई है होतों एक मुटि

तो समिदि में से केवल le दुकड़ो के चुने जाने के कारण होगी, जो प्रतिदर्श-मरिमाण और li के प्रसरण पर निर्मर करेगी। इस मुटिको प्रसिदर्शी-मूदि (sampling error) कहते हैं। यह प्रसरण E (I,--I)° है जिसको हम ज.° ने सुचित करेंगे।

मान कीजिए, प्रतिवर्ध के I- में टुनजे की I1, बार नापा जाता है और J-सी बार के नापने के फल ने I1, से सूचिय करते हैं। I1, भी एक बाव्चिछक चर है जिनके प्रतार $E[(I_0-I_0)^2|I_0]$ को हम σ_0^2 में सूचिय करते हैं। हम बह मान केते हैं कि यह प्रतरण, जो प्रेक्षण चृढि का गण है, हर एक टुकडे के लिए बराबर है। मिंद हम बिना प्रतिवर्ध के I1, के प्रसरण की σ^2 से सूचिय करें तो

$$\begin{array}{lll}
\sigma^2 &= E & [l_{1j} - l]^2 \\
&= E & [(l_{1j} - l_i) + (l_i - l_i)]^2 \\
&= E & (l_{1j} - l_i)^2 + E & (l_i - l_i)^2 \\
&= \sigma_0^2 + \sigma_1^2 & . & (19 \text{ I})
\end{array}$$

इस प्रकार मुटियों के उद्गम यदि स्वतंत्र कप से प्रभाव डाकते हैं तो जो कुल प्रस-रण इन दोनों उद्गमों के सयुनत प्रभाव से होता है, वह अलग-अलग प्रभावों के प्रसरणों गा मोग होता है।

इस गुण को प्रसरणों का संबोज्यता गण कहते हैं।

§ १९३ औसत लवाई का प्रावकलन

अब हम देखें कि कुछ दुकड़ों की औरत छबाई का अनुमान कैसे छयाया जा सकता है। हमें यह पता है कि I_{σ} का प्रत्याधित मान I है। यह इस कारण कि

$$E(l_{ij}) = E[E(l_{ij}|l_i)]$$

$$= E[l_i]$$

$$= l$$

ं इन प्रकार यादिज्ङकीकरण द्वारा चुने हुए हर एक टुकडे पर किया हुआ प्रत्येक प्रेक्षण I,, समस्टि में औसत जबाई का अनिभनत प्राक्कलक है। इस कारण यदि

$$k$$
 ना $\sum_{j=1}^k k_{ij} = 1$ हो जहाँ प्रत्येक k_{ij} एक अचर गच्या है तो $\sum_{r=1}^k \sum_{l=1}^{n^r} k_{ij} \ l_{ij}$ भी l का एक अनिमनत प्राक्करूक है नयोंकि

$$\begin{split} E\left[\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^{n^i}k_{ij}\;l_{ij}\right] &= \sum_{j=1}^k\sum_{l=1}^{n^i}k_{ij}\;E\left(l_{ij}\right) \quad (\text{$\widetilde{\mathsf{diav}}$} \, \S\,\, \Upsilon\, (\mathfrak{o}) \\ &= l\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^{n^i}k_{ij} \end{split}$$

क्योंकि सव I, प्रेक्षणा का प्रसरण बराबर है, इस बारण इन घरो का वह एक-व्याती फरून जिसका प्रसरण निम्नतम हो ऐसा होना चाहिए कि उसमें सब I, बाले पदों के मृणक बराबर हो। इसलिए इन प्रेक्षणों पर आधारित सर्वोत्तम प्राक्किक होगा

$$T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij} / n$$
লহা $n = \sum_{i=1}^k n_i$

६ १९४ औसत लबाई के प्राक्कलक का प्रसरण

इस प्रावकलक का प्रतरण क्या होगा ? इसके लिए हम निम्नलिखित सिद्धात का उपयोग करते हैं। यदि एक ही टुकडे—मान खीजिए v-वें टुकडे—की हैं! n, बार नापा जाय और इन प्रेक्षणों के माध्य को कुल टुकडों की खबाई के माध्य का अनुमान समझा जाय तो इसमें प्रेक्षण शुंट तो कम होकर $\frac{\sigma_o^2}{n}$ रह जायगी, परसु प्रतिदर्शी शुंट में कुछ क्यी नहीं आवेगी। इस प्रकार इस अनुमान का प्रसरण $\sigma_2^2 + \frac{\sigma_o^2}{n}$ होगा I यदि इस अनुमान के I- से सचित किया जाय तो

$$V(\overline{l_1}) = \sigma_1^2 + \frac{\sigma_0^2}{n_1}$$
 (192)

परतु
$$\overline{l} = rac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \, \overline{l}_i$$
 और $\overline{l}_1 \, \overline{l}_{\overline{i}_3}$, $\overline{l}_{\overline{n}}$

-सब स्वतंत्र चर है। इसलिए

$$V(\overline{t}) = \frac{1}{n^{3}} \sum_{i=1}^{k} m_{i}^{2} \left[\sigma_{1}^{2} + \frac{\sigma_{g}^{2}}{n_{i}} \right]$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \ s_{i}^{2} \ s_{i}^{2}}} n_{i}^{2} \sigma_{i}^{2} + \frac{1}{n^{2}} \sum_{i=1}^{k} n_{i} \sigma_{i}^{3}$$

$$= \frac{\sigma_{i}^{2}}{n^{3}} \sum_{i=1}^{k} n_{i}^{2} + \frac{\sigma_{g}^{2}}{n} \qquad \dots (19.3)$$

प्रवि सब टुकडां पर प्रेक्षणों की सख्या बरावर हो और हम इम सख्या को m से सूचित करें हो

$$n_i = m$$
 , $n = m k$

$$\therefore V(\tilde{i}) = \frac{1}{k} \sigma_k^0 + \frac{1}{mk} \sigma_k^0 \qquad \dots \dots (19.4)$$

§ १९.५ प्रसरण का प्राक्कलन

जब हम किसी प्राचक का अनुमान क्याते हैं तो यह भी सावस्थक है कि हमें इस जनुमान की बृद्धि का भी पूछ अवाजा हो। यानी हमें V(7) के प्राचकतन की भी आवस्थकता है। हम कीशिश नरेंने कि हमें σ_s^2 तथा σ_s^2 के अवस्थ अलग अलग प्राचकतन प्राप्त हो जाने ।

\$ १९.५१ कः का आवकलन

भाइए, पहिले हम यह देशें कि ०,º का गया प्रावकलक ही सकता है। क्योंकि इसमें हम प्रेशणों की मूटि का पता चलाना चाहते हैं, यह प्रावकलक एक ही इसके की विभिन्न प्रीक्षत टकाइयों के शतर से सबधित होना चाहिए। मान लीजिए कि हम -में हुनते पर क्लिये हुए प्रेशकों को हो ध्यान में एसते हैं। इस प्रेशकों की मुस्सि के

वर्ग-मोग
$$\sum\limits_{j=1}^{n_s} (l_{ij}-\widetilde{l_i})^2$$
 है।

$$E\Big[\sum_{l=1}^{n_i} (l_{ij} - \overline{l_i})^2\Big] =: E\Big[\sum_{j=1}^{n_i} \{(l_{ij} - l_i) - (\overline{l_i} - l_i^i)\}^2\Big]$$

$$= \sum_{l=1}^{n_1} E(l_{ij} - l_i)^2 - n_i E(\overline{l_i} - l_i)^2$$

$$= n_i \sigma_0^2 - n_i \frac{\sigma_0^2}{n_i}$$

$$= \sigma_0^2 (n_i - 1) \qquad (19.5)$$

इस प्रकार σ_{0}^{2} का एक अनिभानत प्राक्कराज $\sum_{j=0}^{10} \frac{(I_{ij}-\overline{I_{i}})^{2}}{m-1}$ है। इस प्रकार

विभिन्न दुकडा से σ_p^2 का प्रावरलन विद्या जा सकता है । इन विभिन्न प्रावनलको स्था भारित भाष्य (weighted mean) भी σ_p^2 का अनुभिन्त प्रावकलक होगा।

उदाहर ए के लिए
$$M_o = \frac{S_o}{n \, k} = \frac{\sum\limits_{l=1}^k \sum\limits_{j=1}^{n_l} (l_{ij} - \overline{l_i})^2}{n - k}$$
 इसी प्रकार का एक

मारित माध्य है जिसमें ा—वे प्रावकलक वा सार (n₁-1) है !

परतु
$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = (n-1)$$
 है।

९ १९५२ ०३ का प्राक्कलन

इस प्रकार हम प्रेक्षण वृष्टि का अनुमान लगा सकते है । आइए अब हम देखें कि प्रतिदर्शों वृष्टि ϕ_1^4 का अनुमान किस प्रकार लगाया जाय । वयंकि यह वृष्टि इनकी की बास्तविक ल्वाइयों का प्रसरण है, इसलिए यह स्वाधाविक है कि हम इसके लिए टुकड़ा पर किये प्रेक्षणों के माध्यों के अंतर की परीक्षा करें । उदाहरण के लिए

$$S_{1} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_{i}} \{(\overline{l_{i}} - \overline{l})^{2} \}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} n_{i} T_{i}^{2} - n\overline{l^{2}}$$
(196)

$$\begin{split} E\left(S_{1}\right) &= \sum_{i=1}^{k} n_{i} \left[\sigma_{i}^{2} + \frac{\sigma_{o}^{2}}{n_{i}} + l^{2}\right] - n \left[\frac{\sigma_{i}^{2}}{n} \sum_{i=1}^{k} n_{i}^{2} + \frac{\sigma_{o}^{2}}{n} + l^{2}\right] \\ &= \sigma_{i}^{2} \left[n - \sum_{i=1}^{k} n_{i}^{2}\right] + (k-1) \sigma_{o}^{2} & ... \end{cases} \tag{197}$$

क्यांकि $E(\overline{l}_i^*) = V(\overline{l}_i) + l^2$, $E(\overline{l}^2) = V(\overline{l}) + l^2$ तथा $\sum_{i=1}^k n_i = n$, इस प्रकार σ_1^2

का प्राक्कलक $S'_1 := \frac{S_1 \cdots (k-1)\,M_o}{n-\sum\limits_{j=1}^k n_j^2}$ होगा । यदि सब n_i बराबर हो और

इनकामान m हो तो

$$S'_1 = \frac{S_1 - (k-1)M_o}{n-m}$$
(19 8)

तथा
$$S_1 = m \sum_{i=1}^{k} (1 - \overline{I})^2$$
 ... (199)

६ १९६ प्रसरण विश्लेपण (Analysis of variance)

इन प्रसरणों के प्राक्कलनों के कलन के लिए यह ब्यान देने योग्य बात है कि

$$\begin{split} & \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (l_{ij} - \overline{l})^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (l_{ij} - \overline{l}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (\overline{l}_i - \overline{l}_j)^2 \\ &= S_0 + S_1 \quad . \quad (19 \ 10) \end{split}$$

इस प्रकार सावारण माध्य ी से प्रेक्षणों के वर्ग विचलनों (squared deviations) का योग दो गागों के घोंग के स्पार्ग रखा जा सकता है—

(१) समूह माध्य (group mcm) से वस समूह के समस्त चरो के बाँगत विचलते का गीम निसकी समूहान्यन्तरिक वर्ग-योग (within group sum of squares) कहा जा सकता है। (२) साधारण भाष्य से समूह-भाष्यों के वर्गित विचलनों का योग, जिसको अंत-सामूहिक वर्ग-योग (between group sum of squares) की सज्ञा दी जा सकती है. अर्थात

> सम्पूर्ण वर्ग-योग-अतर-सामूहिक वर्ग-योग-|-समृहाम्यन्तरिक वर्ग-योग(19 11)

इस प्रकार सम्पूर्ण बिग्ति विचलन योग को कुछ भागों में विभाजित करने की प्रसरण विदेशेगण कहते हैं।

§ १९.७ प्रसरण विदलेषण का परिकल्पना की जांच में उपयोग

दो प्रकार की समस्याएँ हैं जिनमें असरण विस्तेषण का उपयोग होता है। एक में तो प्रेक्षणों को कुछ सभव प्रेक्षणों के एक नाल्यनिक जगत् का प्रतिवर्ध मान विध्या जाता है। विस्तेषण का उद्देश इस जगत् के प्रसरण का प्रवक्तकन करना होता है। यह कैसे विधा जा सकता है यह इस अगर के उदाहरण में वेख हो चुके है। जिन उस के इक्कों के जगत् का एक सद्देशक प्रकार है वह कुछ त्वर के दुक्कों के जगत् का एक सद्देशक प्रतिवर्ध है। एक ही दुक्के के जितने नाप किये जाते हैं उनके कुछक को उस दुक्के के जब सभव नापों के एक काल्यमिक कगत् का प्रतिवर्ध माना जाता है। इस दो जाता के असरण कमाना के ति है की देश है की उद्देश इस दोनों असरणों का सुमान लगाता है। इस दो जाता के असरण कमाना के स्वराध काला के समस्य होती है भाष्या की जुछना। यदि दो समस्य होती रिकार कर की जाती विकार के समस्य होती है भाष्या की जुछना। यदि दो समस्य होती है भाष्या की जुछना। यदि दो समस्य होती है। कि इन दोनों के साध्य समान है तो इसके जाँव किस प्रकार की जाती पहल कमाने के साध्य समान है हो हि है कि इन दोनों के साध्य समान है तो इसके अनेक समस्यों के साध्य समान है तो हुन मान करती है। अपदा इस परिकरना की जाँव करनी हो कि इस समस्य होती है। अपदा इस परिकरना की जाँव करनी हो कि इस समस्य समस्य होती है। अपदा इस परिकरना की जाँव करनी हो है। कि इस समस्य होती है के समस्य समस्य होती है। अपदा इस परिकरना की जाँव करनी हो हि इस समस्य होती है। अपदा इस परिकरना की जाँव करनी हो कि इस समस्य होती है। अपदा इस परिकरना की जाँव करनी हो कि इस समस्य होती है। अपदा इस परिकरना की उत्तेष करनी होती है।

मान लीजिए कि ऊपर के उदाहरण में हमारी निराकरणीय परिकल्पना यह है कि प्रतिदर्श के प्रत्येक टुकडे की वास्तविक लबाई बराबर है। यदि ऐसा हो तो ज्है=0 और

$$E(S_1) = (k-1) \sigma_0^2$$
 ... (19 12)

[देखिए समीकरण (197)]

इस प्रकार परिकल्पना के असर्गतत $M_o=rac{S_o}{g-k}$ सथा $M_2=rac{S_1}{k-1}$ दोनो ही σ_0^2 के अनमिनत प्राक्तकक है । परतु यदि परिकल्पना सत्य न हो तो M_i

दाना हा 🕫 के अनामनत प्रावक्ष्यक है । परंतु याद पारंपराना राज ने हो जान का प्रत्याधित मान 🕫 से अधिक होता है । इस कारण यदि यह मान लें कि

$$F = \frac{M_i}{M_o} = \frac{S_1/(k-1)}{S_0/(n-k)}$$

= $\frac{(a\pi \pi \cdot \pi i \pi | e \pi \cdot \pi i \pi i \pi)}{(a\pi \pi i \pi i \pi i \pi \pi i \pi i \pi)/(n-k)}$ (19.13)

तो मि ऐसा चर है जिसका मान परिकल्पना की संस्थता पर रोधनी डाल सकता है। यदि यह बहुत अधिक हो तो परिकल्पना पर सक होना स्वामाविक ही है।

🞙 १९.८ प्रसरण-विश्लेषण सारणी (Analysis of variance table)

अतर सामृहिक, समृहान्यन्तर और सन्पूर्ण वर्ण-योगो और उनकी स्वातण्य महयाओ को एक सारणी के रूप में रक्षा जा सकता है। इस सारणी को प्रवरण शिक्तयण सारणी कहते हैं। अपर के प्रयोग के लिए हमें जो सारणी प्राप्त होती है वह नीचे दी हुई है।

सारणी संस्था 19.1

		Я¢	रिण विश्ववयम् सरिना	
विचरण	वर्ग-योग	स्वातच्य सस्या	वर्ग-माप्य	वर्ग-माध्य का प्रत्याशित मान
(I)	(2)	(3)	(4)	(s)
अतर सामूहिक	$\sum_{j=1}^{k} n_i (\overline{l_i} - \overline{l})^2$ $= S_1$	k-1	$\frac{S_1}{k-1} = M_2$	$\sigma_Q^2 + \sigma_3^2 \left[n - \sum_{i=1}^k n_i^2 / n \right]$
समूहास्य- न्तरिक	$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n^i} (l_{ij} - \overline{l_i})^2 \\ = S_o \end{vmatrix}$	n-k	$\frac{S_o}{n-k} = M_o$	$\sigma_{1}^{\ k}$
सम्पूर्ण	$ \begin{array}{c c} k & \pi_s \\ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_s} (l_{ij} - \overline{l})^2 \\ = S \end{array} $	n-1	$\frac{S}{n-1} = \frac{S_1 + S_o}{n-1} = M$	$\sigma_0^2 + \frac{k-1}{n-1} \left[n - \sum_{i=1}^k n_i^2 \right] \sigma^2$

इस सारणी डारा यह सरकता ते देखा जा सनता है कि सम्पूर्ण वर्ग-योग शंतर-सामृहिक और समूहाम्यन्तरिक वर्ग-योगो का योग है। इभी प्रकार कुछ स्वातच्य सरवा भी अंतर-सामृहिक और समूहाम्यन्तरिक स्वातच्य-सरवाओ का योग है। वर्ग- योगों का यह सयोज्यता-गुण प्रसरण विस्तेषण में यहुत महत्त्वपूर्ण है। यदि हम अंतर साम्मूहिक वर्ग-योग तथा सम्पूर्ण कर्ग-योग वा करन कर हें तो समूहाम्यत्विक वर्ग-योग पहरें को हुसरे में से घटा वर माजूम विद्या जा सकता है। प्रसरण विस्तेषण सार्प्ण का उद्देश्य केवल इस प्रकार से समूहाम्यत्विक वर्ग-योग कालन ही नहीं वित्त अंत में वर्ग-योग कालन ही नहीं वित्त अंत में वर्ग-योग के अनुपात $F=\frac{M_1}{M_2}$ ना परिवरून है। यही वह धर है जिसके मान के आधार पर हमें धव समूहा के माध्य के बरावर होने की परिवरूना की जांच करती है।

- १९९ कुछ कल्पनाएँ जिनके आधार पर निराकरणीय परिकल्पना की जाँच की जाती है
- (1) मान लीजिए कि :- में समूह पर किया हुआ j-मी प्रेक्षण l_{II} एक प्रसामान्य नर है जिसका माध्य l_{I} और प्रसरण σ_{al}^{a} है। इस दशा में हम l_{II} को निम्नलिखित रूप में एस सकते हैं।

$$l_n = l_1 + \epsilon_n$$

जहाँ \mathbf{C}_B एक प्रसामान्य चर है जिसका माध्य \mathbf{o} और प्रसरण σ_{ol}^2 है।

(2) यदि ये हैं । एक दूसरे से स्वतन हो तो

$$\frac{1}{\sigma_{ol}^{2}} \sum_{i=1}^{n_{l}} (l_{ij} - \hat{l}_{i})^{2} = \frac{1}{\sigma_{oi}^{2}} \sum_{i=1}^{n_{l}} (e_{ij} - \hat{e}_{i})^{2}$$

ऐसा x²—चरहोगा जिसकी स्वातत्र्य-सख्या (n,— I) है। (देखिए ६९११)

इसी प्रकार
$$\frac{1}{\sigma_{01}^{2}} \stackrel{n_{1}}{\underset{>}{\Sigma}} (l_{ij} - \overline{l_{j}})^{2}, \frac{1}{\sigma_{01}^{2}} \stackrel{n_{2}}{\underset{>}{\Sigma}} (l_{2j} - \overline{l_{2}})^{2},$$

शादि सब याद्षिकक चरो के बटन भी x^2 बटन है जिनकी स्वातच्य सस्वाएँ कमर्श (n_1-1) , (n_2-1) ...इत्यादि हैं । इसके अलावा ये घर एक दूसरे से स्वतन्न हैं ।

इस कारण इन सबका योग $\sum_{r=1}^{k} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{r=1}^{n_s} (l_{il} - \overline{l_i})^s$ भी एक χ^2 — चर है जिसकी

स्यानच्य सस्या
$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \Longrightarrow (n - k)$$
 है । (देखिए § ९.४)

(3) अब यहाँ एक और कस्पना करते हैं । वह यह कि हर एक टुकड़े के लिए प्रेक्षण-प्रसूरण बराबर हैं । यानी

$$\begin{array}{lll} \sigma_{01}{}^{2} = \sigma_{02}{}^{2} = & = & \sigma_{0n}{}^{2} = \sigma_{0}{}^{3} \\ & & = & \frac{1}{\sigma_{0}{}^{2}} = \frac{1}{\sigma_{0}{}^{2}} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \; (l_{lj} - \overline{l_{j}})^{2} \; \hat{\pi} l \; \nabla \pi \; \chi_{a-b}^{2} \; \overline{\pi} r \; \hat{\xi} \; l \end{array}$$

इसके अलावा

$$(\overline{l}_1 - \overline{l}) = (l_1 - l) + (\overline{e}_1 - \overline{e}_1)$$

यहाँ हः एक
$$N\left(\mathbf{o}, \frac{\sigma_{r}}{\sqrt{1-\sigma_{r}}}\right)$$
 घर है। इस शारण

 $\overline{\epsilon}_{n}, \overline{\epsilon}_{n} = \overline{\epsilon}_{n} \text{ with same series } \overline{\epsilon}_{n}$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{3} n_i (\overline{e}_i - \overline{e})^2 = \overline{v} \pi \times \frac{2}{6}$$
 जर है। परहु

$$\textstyle\sum\limits_{i=1}^k n_i \ (\; \overline{\in}\; , - \; \overline{\in}\;)^{\mathop{\mathtt{k}}} \; = \; \sum\limits_{i=1}^k \; n_i \; \; [(\overline{l}_i - \overline{l}\;) - (l_i - l)]^2$$

\$ १९१० F-परीक्षण

यदि हमारी निराकरणीय परिकरपना यह हो कि

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_k = l$$
 and

$$\sum_{i=1}^{k} n_{i} (\vec{e}_{i} - \vec{e}_{i})^{2} = \sum_{i=1}^{k} n_{i} (\vec{l}_{i} - \vec{l}_{i})^{2} = S_{1}$$

इसलिए इस परिकल्पना के अतर्गत अतर-सामृहिक प्रसरण $\frac{S_2}{\sigma_o^2}$ एक x^2_{r-1} पर है और क्योंकि यह S_o से स्वतन है इस कारण इस परिकल्पना के अतर्गत

$$F = \frac{S_1/k-1}{S_0/n-k}$$
 एक $F_{k-1'-k-1}$ चर है। (देखिए ६१११)

यदि इसका प्रेक्षित मान सारणी में दिये हुए $F_{F^{*}}$ के पौच प्रतिशत विदु अथवा किसी निश्चित बिंदु से अधिव हो तो हम इस परिकल्पना को गल्त समझते हैं ।

जरर हमने देशा कि नुख परिकल्पनाका के अवर्गत दो वर्ग-माध्यों ना अनुपात एक F—वर होता है और इस कारण हम उन परिलल्पनाकों की जीच प्रयोग द्वारा कर सनते हैं। जगर यह सिद्ध करने ने लिए कि इस अनुपात का कर F—वरन है हु हमने प्रसार मह सिद्ध करने के लिए कि इस अनुपात का कर F—वरन है हु हमने प्रसारायता आदि कुछ अन्य कल्पनाओं को भी अपनी मुख्य परिकल्पना के साथ मिला दिया था। साल्यिकों ने मणना करने यह सिद्ध कर दिया है कि इन अन्य करपनाओं को अनुपत्ति वर्ष यद्या है कि इन अन्य करपनाओं को अनुपत्ति वर्ष यद्या पित्र कर करपनाओं को अनुपत्ति वर्ष यद्या पित्र कर का यदा F—वटन की 95 प्रतिस्त विश्वास्य सीमार्थ सिद्ध कर विश्वास्य सीमार्थ से इतने कम अत्य पर होगी कि हम F—वटन का ही प्रयोग परिकल्पना को जाँचने के लिए यदि करों तो कोई विश्वा चूटिन नहीं होगी।

राज्य पार कर ता काई । व्याप नृति नहीं होगा।

इस जदाहण में हमने तेवा कि दो प्रकार की चृदियों में से एक प्रकार की चृदि की
अनुरक्षित की परिकल्पना को कैसे जांचा जाता है। अन्य कई ऐसी परिस्थितियों
ही सकती है जिनमें कई प्रकार की चृदियों प्रेक्षण पर प्रभाव बालती है। इस स्थित
में हम नारी-चारी से हर एक की अनुपरिवात की परिकल्पना की लॉक वरना नाहतें।
इसके लिए यह आवदयक नहीं है कि विचरण के प्रयोक उद्गम की प्रभावसीलती की
जांच के लिए एक नवा प्रयोग किया जाता। प्रयोग की अधिकल्पना इस प्रकार की जा
सकती है कि एक ही प्रयोग में सब परिकल्पनाओं की जांच हो सके। आगे के अध्यापी
में इस प्रकार की कुछ अभिकल्पनाओं की उवाहरण सहित समझाने की चेष्टा की

अध्याय २०

याद्चिञ्जकीकृत-ब्लॉक अभिकल्पना (Randomized Block Design)

६ २०१ ब्लॉक बनाने का उद्देश्य

मान लीजिए, वेहें की चार किस्में है और हम प्रयोग द्वारा यह जानना चाहते हैं कि इनमें से सर्वोत्तम गौन-सी है। वहाँ अच्छी विस्म से हमारा वात्पर्य उस किस्म से है जिसमें प्रति एकट अधिक गेहें उत्पन्न हो । यह कहा जा सकता है कि यह प्रयोग तो अत्यन्त सरल है। आप इन विभिन्न किस्मो को बोकर देख कीजिए कि किसमें गेहें अधिक होता है। परसु आइए हम तनिक ज्यान इस बात पर दें कि इस प्रयोग में नया क्या विकाल हो सकती है। सबसे बड़ी और पहली दिवकत तो यह है कि गेहें की उपज कैवल उसकी विस्म पर ही निभैर नहीं करती बल्कि बहुत हद तक जभीन भी इसकी प्रभावित करती है। यदि धरती उपजाक हो तो उसमें गांगकी किस्म का गेहें भी अधिक उपज दे सकता है। यदि इस प्रयोग में स्योग से अच्छी विस्स का गेह बजर धरती में बो दिया गया और मामली किस्स का गेहें उपजाक धरती में बोवा जाय तो यह सभव है कि प्रयोग से निष्कर्ष उलटा ही निकले । इसलिए इस बात का ध्यान रखना पडेगा कि सब गेहूँ एक समान उपजाऊ धरती में वोये जायें । परन्तु खाद इत्यादि देकर त्या अपर से हल चलाकर और पानी देकर खेती को एक समान करने की चाहे जितनी चेप्दा की जाम जनमें कुछ न कुछ अतर रह ही जायगा।

यदि आप यह सोचते हो कि एक ही खेत में बारी बारी ने किस्मो को बोने से यह समस्या हरू हो जायगी तो यह भी आपका भ्रम है। एक तो यह दिवस्त है कि परती का उपजाऊपन समय के साथ बदलता है और किसी हद तक इस बात पर निभेर करता है कि पिछले वर्ष इसमें कीन-सी फसल बोधी गयी थी । इसके अलावा जलवाय का ख़ेती पर जो महरवपूर्ण प्रभाव पडता है उसे तो आप जानते ही है। इसके ही नारण एक ही खेत में एक ही प्रकार के वेहें की उपज भी भित्र-भिन्न वर्षों में भिन्न-भिन्न होती है। इसलिए यदि हमें गेहें को किस्मो की तुलना करनी है तो यह आवस्यक है कि प्रयोग-काल अलग-अलग न हो।

इस प्रकार हम इस निप्पर्य पर पहुँचते हैं कि एक ही समय में और जहाँ तक हो सके एक समान उपलाक घरती पर ही इन सब किस्तो नो बोधा जाय । यदि एक ही खेत के छोटे-छोटे विभाजन करके उसमें उनको तोया जाय तो यह आशा की जा समर है कि इन दिसाजनो के उपजाक्षन में विद्याप काद नहीं होगा । फिर भी कुछ नतर इनमें अवस्य होगा और इसका च्यान हमें नुकना करते समय रसना पड़ेगा । वदि भीक्षण उपजो का अतर साधारण हो तो क्यानित्र यह इन विभाजनो के उपजाक्रम के अतर के कारण ही हो और इस परिस्थित में हमारे किए यह कहना समय नहीं है कि कीन ती किस्सा में अपन किस्सा के उपजाक्रम के अतर है कारण हो हो और इस परिस्थित में इसारे किए यह कहना समय नहीं है कि कीन ती किस सबंभेज है अयवा किस्सो को उपजा के उस के स्वार्थ के स्वर्थ के स्वार्थ
किसी बिरोप किस्म की कोई तरफदारी हम अपनी और से नहीं करना चाहते । इसिलए फिस दिमाजन में कौन-सी किस्म का गेहूँ बोया जाय, यह निश्चय पावृच्छिदी-करणद्वारा किया जाता है । फिर भी सबोग के प्रभाव को कम करने के लिए यह आव-रयक है कि एक ही किस्म का गेहूँ एक से अधिक विभाजन में बोया जाय । इस प्रकार यदि मयोग से एक विभाजन उसे अच्छा मिल जाता है तो एक साधारण भी मिले । सभी दिभाजन अच्छे या सभी साधारण हो इसकी प्रायक्ता को घटा कर हम स्थमम सुन्य के बराबर कर देना चाहते हैं । इसके लिए जो तरकीब साधारणतया काम में साथी जाती है यह निम्मलिखित है ।

एक साथारण लबाई बीडाई के भूमि खड को, भिसे आगे हम ब्लॉन कहेंगे। इन बार भागों में विभाजित किया जाता है। इन बागो को हम स्काट कहेंगे। इन बारो भागों में एक-एक किस्म का गेहूँ वो दिया जाता है। वौन-से स्कॉट मे कौन सा गेहूँ बोला जाताता है। इन स्कॉट मे कौन सा गेहूँ बोला जाताता है। इन स्कॉटो के एक छोटे भूखड के भाग होने के वारण समझा जा सकता है कि इनके स्वाभाविक उपजाजमन में अधिक अतर होगा। इस प्रकार के जिल्ल-मिला कई ब्लॉको मे प्रयोग किया जाता है जिल्ला से हम एक में गेहूँ की बार विस्ता के स्विप्त अतर होगा। इस प्रकार के जिल्ल-मिला कई ब्लॉको मे प्रयोग किया जाता है।

५ २०३ याद्च्छिकीकृत ब्लॉक अभिकल्पना और पूर्णंत याद्च्छिकीकृत अभिकल्पना में अन्तर

इस प्रकार यदि कुछ r ब्लॉको पर प्रयोग किया जाय तो प्रत्येक प्रकार के मेहूँ के लिए r प्लॉट मिलते हैं। परतु यह 4r प्लॉटो में से r प्लादो के याद्च्छिकीकरण द्वारा चुने जाने से जिल है। इस प्रकार की पूर्णतः बाद्धिक्वीकृत अभिवस्थमां (completely randomized design) में इस पटना की प्रायिकता बहुत कम है कि हुए एक स्टॉक में हुए एक किस का मेंहूँ एक-एक प्लॉट में बीय जाया। किसी क्लॉक में किसी विजय किस्म का बोहूँ दो या अधिक बार बीया जाता और जिमी अस्य स्टॉक में किसी अस्य किस्म का । यह समय है कि स्टॉक में उपाजकान में लाफी असर हो। इस द्वारा में यदि इन चार किस्मी के मेंहूँ की बीयत पैदाबारों की तुल्ला प्रयोग में की जायत हो उस की स्टॉक के उपाजकान का अतर इसा अधिक प्रदि उसक कर देगा कि प्रविद दिन किसा में अबद की हो तो इस प्रयोग द्वारा हुम इसे नहीं जाता कर स्टॉक कि इस प्रयोग द्वारा हुम इसे नहीं जाता सकतें। परतु हुर एक स्टॉक में प्रत्येक किस्म के मेहूं को एक एक प्लॉट में बीने से यदि इलांकी के बीच में कुछ असर हो भी वो उसका प्रभाव जाता रहता है। इस प्रकार की प्रयोग अभिकल्पना को पाड़ी-जड़नीकृत-लांक अभिकल्पना को पाड़ी-जड़नीकृत-लांक अभिकल्पना को पाड़ी-जड़नीकृत-लांक अभिकल्पना को पाड़ी-जड़नीकृत-लांक अभिकल्पना को पाड़ी-जड़नीकृत-लांक अभिकल्पना को पाड़ी-जड़नीकृत-लांक अभिकल्पना (randomized block design) कहते हैं।

नीचे इसी प्रकार के प्रयोग का एक नक्शा दिया हुआ है। चार किस्म के में मुँबों को कनशा A, B, C और D की सक्ता दी गयी है। उलांको को नन्दर I, II कथानि दिये गये है। इस प्रयोग में उलांकों की करु मध्या छ है।

। इत्याव दिय गय ह । इस 1				1414 H 4		Zo 4	मा है।		
	A D			B C			C A		
	С	В		A D			D	В	
	17			v			VI		
	С	D		С	D		В	D	
,		В		A	В		A	C	

§ २०.४ वे उपादान जिन पर पैदावार निर्भर करती है

विसी भी प्लॉट में गेहें की पदावार तीन चीओ पर निर्भर करती है।

- (१) गेहें की किस्म,
- (२) ब्लॉक की भूमि का उपजाऊपन,
- (३) ब्लॉक के जदर का नह प्लॉट जिस पर यह किस्म दोगी गगी है। यह अतिम पुनाव याद्राण्डकीकृत होने के कारण हम इस प्लॉट-प्रभाव का बटम मालूम कर सकते हैं। इसलिए किस्मों के जतर की जांच करने के लिए यह आवश्यक है कि ब्लॉक के प्रभाव को इस मुलना से हटा सकें।
- § २०५ याद्चिछकोकृत व्लॉक अभिकल्पना के विश्लेषण के लिए एक
 गणितीय प्रतिरूप

मान लीजिए कि ब्लॉक । के प्रमाव को b, से सूचित किया जाता है और j-वें किस्म के गेहूँ के प्रभाव को v, से सूचित किया जाता है । i-वें ब्लॉक में j-वें किस्म के गेहूँ की उपज को यदि g_{ij} से सूचित किया जाता है तो

$$\gamma_{ij} = b_i + \nu_j + \epsilon_{ij}$$
(20.1)

यहीं e, फ्लोंटो के उपजाजनन के अंतर पर आश्रित एक याद्विष्णक कर है। पहले के उदाहरण की भीति हम कल्पना करते हैं कि e, एक प्रसामान्य कर है जिसका माध्य 0 और प्रसरण लै है जो ब्लॉन पर अवना गेहूँ की किस्म पर निर्मर नहीं करते। इसके अलावा से कब जीवीसी e, एक दूसरे से स्पतन है। क्यों कि हम), अयवा b, का प्रमोग केवल तुलना के लिए कर रहे हैं, इसलिए हम दनकों कमरा किस्म-प्रभाव और बनने माध्यों के अतर मान सकते हैं। इस कारण

मान लीजिए

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\sqrt{1}} (b_i + \nu_i + \epsilon_{ij})$$

$$= \nu_j + \epsilon_j \qquad \dots \dots (20.5)$$

 $\nabla R_{i}^{2} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{VI} \epsilon_{ij} \qquad(20.6)$

यहाँ $\overline{\gamma}_j$ एक प्रसामान्य चर है जिसका माध्य ν_j और प्रसरण $\frac{\sigma^2}{6}$ है। इसी प्रकार $\overline{\gamma}_j''$ उठ च्छाँडो के प्रेलणों का माध्य है विसमें f^{**} -पी किस्स बोयों गयी है। यह भी एक प्रसामान्य चर है जिसका माध्य ν_j , और प्रसरण $\frac{\sigma^2}{6}$ है। में योगों घर स्वतान्त है इसिक्छ $\{\gamma_j - \gamma_j'\}$ भी एक प्रसामान्य चर है जिसका माध्य $(\nu_j - \nu_j)$, और प्रसरण $\frac{\sigma^2}{6} + \frac{\sigma^2}{6} = \frac{\sigma^2}{3}$ है। (देखिए § 4.३)

यदि निराकरणीय परिकरणना यह है कि $\nu_{j} \sim \nu_{j}'$ तब इसके अवर्गत इस प्रसामान्य पर पर माध्य ρ होणा । यदि हमें σ^2 यह मता शांत हो तो इस परिकरणना भी जांच इस प्रमामान्य बटन के आधार पर कर छन्ते हैं । परंतु σ^4 वास्तव में जात मही है और इसका अनुसान लगाने की आवश्यकता है ।

🞙 २०.६ विभिन्न परिकल्पनाओं के अन्तर्गत 🗗 का प्राक्कलन

हम
$$\vec{y_i}$$
, $\hat{\mathbf{g}}_{\underline{a}} = \frac{\mathbf{I}}{4} - \sum_{f=A}^{D} \vec{y_f}$ और \vec{y} के $\frac{\mathbf{I}}{6} - \sum_{i=1}^{VI} \vec{y_i}$ अथवा $\frac{\mathbf{I}}{4} - \sum_{f=A}^{D} \vec{y_f}$ को

मूचित करेंगे जो दोनों $\frac{1}{24}\sum\limits_{i=1}^{VI}\sum\limits_{j\in J}y_{ij}$ के बरावर है। इसी प्रकार

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{4} \sum_{j=A}^{D} \quad \tilde{\epsilon}_{-j} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{VI} \tilde{\epsilon}_{-i} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{VI} \sum_{j=A}^{D} \epsilon_{ij}$$

(1)
$$\sum_{j=A}^{D} (\overline{y}_{j} - \overline{y}_{j})^{2} = \sum_{j=A}^{D} \{(v_{j} + \overline{e}_{j}) - \overline{e}_{j}\}^{2}$$
 देखिए समीकरण (20°3) और 20°5)

$$= \sum_{j=A}^{D} v_{j}^{2} + \sum_{j=A}^{D} (\overline{\epsilon}_{\cdot j} - \overline{\epsilon}_{\cdot})^{2} + 2 \sum_{j=A}^{D} v_{j} (\overline{\epsilon}_{\cdot j} - \overline{\epsilon}_{\cdot})$$

परतु । और ह, स्वतत्र है। इस कारण

$$\sum_{j=A}^{D} v_{j} \left(\tilde{\epsilon}_{j} - \tilde{\epsilon} \right) = \sum_{j=A}^{D} v_{j} \sum_{j=A}^{D} \left(\tilde{\epsilon}_{j} - \tilde{\epsilon}_{j} \right)$$

$$= 0$$

विन्तु हर एक \in , का बटन $N(\mathbf{o}, \frac{\sigma}{\sqrt{6}})$ है। इस कारण $\frac{\sigma^2}{6}$ का अनिमनत

अनुमान
$$\frac{1}{3} \sum_{j=A}^{D} (\bar{\epsilon}_{j} - \bar{\epsilon}_{j})^{2} \hat{\epsilon}_{j}$$
। (देखिए ६ १७.३.१)

मानी $\frac{1}{3}\sum_{j=A}^{D}\nu_{j}^{2}+\frac{\sigma^{2}}{6}$ का अनिभनत प्राक्ककर $\frac{1}{3}\sum_{j=A}^{D}\left(\overline{y}_{j}-\overline{y}\right)^{2}$ [है। यदि सब ν_{j} बरावर हो तो

$$v_A = v_B = v_C = v_D = 0$$
 (देखिए समीकरण 203)

त्रया $E\left[\frac{1}{3}\sum_{j=A}^{D}(y_{j}-\overline{y})^{2}\right]=\frac{1}{6}\sigma^{2}$ (20.7) (2) इसी प्रकार

$$E\left[\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{VI}(\overline{y_i}-\overline{y})^2\right] = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{VI}b_i^2 + \frac{\sigma^2}{4} \qquad (208)$$

यदि दलाँको के कारण उपज पर कोई प्रभाव पडता हो तो

$$b_I = b_{II} = b_{III} = b_{IV} = b_V = b_{VI} = 0$$
 और

$$E\left[\frac{1}{5}\sum_{\substack{y=1\\y=1}}^{y}\left(\overline{y}_{y}-\overline{y}\right)^{2}\right]=\frac{\sigma^{2}}{4}\qquad \qquad . . . (20.9)$$

५ २०.७ विना परिकल्पना को त्यका प्राक्कलन

इस प्रकार हमें दो परिकल्पनाओं के अंतर्यंत 🗗 के दो विभिन्न प्राप्तकलक प्राप्त हुए । अब देखना यह है कि बिना परिकल्पना के भी 🕫 का अनिभनत प्राक्तलन सभव है अयदा नहीं।

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=A}^{D} (\gamma_{ij} - \widetilde{\gamma})^3 = \sum_{i=3}^{N} \sum_{j=A}^{D} (\nu_j + b_i + \epsilon_{ij} - \widetilde{\epsilon})^3 \text{ [start and }$$

करण (20 1), (20 2) और (20.3)]

$$= 6 \sum_{j=A}^{D} \nu_{j}^{2} + 4 \sum_{i=1}^{VI} b_{i}^{2} + \sum_{i=1}^{VI} \sum_{j=A}^{D} (e_{ij} - \bar{e})^{2}$$

$$+2\sum_{j=1}^{N}\sum_{j=k}^{N}\nu_{j}\;b_{i}+2\sum_{j=1}^{N}\sum_{j=k}^{N}\nu_{j}\;\left(\in\iota_{j}-\overline{\bullet}\right)+2\sum_{j=1}^{N}\sum_{j=k}^{N}\left(\in\iota_{j}-\overline{\bullet}\right)$$

इनमें से जितन गीनो राशिजां शूच के वरावर है वयोशि ν_j , b_i और $\in y$ एक दूसरे से स्वतन है। और $E(\nu_j) = E(b_i) = 0$ (वेजिए ६ ४ ९)

ছस प्रकार
$$\sum_{j=1}^{VI} \sum_{j=A}^{D} (y_{ij} - \vec{y})^2$$
 का श्रत्याशित मान $\sum_{j=A}^{D} y_j^2 + 4 \sum_{j=A}^{VI} y_j^2 + 23\sigma^2$

हैं। इसमें ने वर्षि 6
$$\sum_{j=A}^{D} (\widetilde{\gamma}_{j}-\widetilde{\gamma}_{j})^{2}+4\sum_{j=A}^{N} (\widetilde{\gamma}_{i}-\widetilde{\gamma}_{j})^{2}$$
 घटा दिया जाय तो शेंप

राशि का प्रत्याचित मान 150° होगा । यह अनुमान किसी परिपाल्पना पर आपारित नहीं हैं।

\$ २०८ प्रसरण विक्लेपण सारणी

इस प्रकार के कुल तीन प्रावकलक है।

(1)
$$6\sum_{i=1}^{D}(\gamma_i-\gamma)^2$$
 मह इस परिकल्पना पर आधारित है कि मेहूँ की किस्मो

में पैदानार के वृष्टिकोण से कोई अन्तर नहीं है। या

$$v_A = v_B = v_C = v_D$$

(2)
$$\frac{4}{5} \sum_{i=1}^{NI} (\overline{y_i} - \overline{y})^2$$

यह इस परिकरपना पर आधारित है कि ब्लॉको के उपजाऊपन म कोई अंतर नहीं है अयवा

$$b_{I} = b_{II}^{I} = b_{III} = b_{IV} = b_{V} = b_{VI}$$

$$VI \quad D \quad \sum_{X} \sum_{j=1}^{N} (y_{ij} - \overline{y})^{2} - 6 \sum_{j=N}^{N} (\overline{y}_{j} - \overline{y})^{2} - 4 \sum_{j=1}^{N} (\overline{y}_{i} - \overline{y})^{2}$$

$$(3) \quad \sum_{X} \sum_{j=N}^{N} (y_{ij} - \overline{y})^{2} - 6 \sum_{j=N}^{N} (\overline{y}_{j} - \overline{y})^{2} - 4 \sum_{j=1}^{N} (\overline{y}_{i} - \overline{y})^{2}$$

यह सभी परिकल्पनाओं से स्वतन्त्र है। हम इन सब निष्कर्षों की एक प्रसरण-विश्लेषण सारणी के रूप में रक्ष सकते है।

सारणी सरया 201 प्रसरण विक्तियण सारणी

विचरण का उद्गम	वर्ग योग	स्वातम्य संस्या	वर्गं माध्य	वर्ग साध्य का अत्याशित मान
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
वि स्म	$\sum_{i=1}^{V1} \sum_{j=A}^{D} (\overline{\gamma}_{j} - \overline{\gamma})^{2}$ $= S_{1}$	ł	$\frac{S_1}{3} = M_1$	$\sigma^2 + \frac{6}{3} \sum_{j=A}^{D} \nu_j^2$
<u>হল্লা</u> ক	$ \begin{array}{c c} \hline VI & D \\ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=A}^{N} (\vec{y_i} - \vec{y})^2 \\ = S_2 \end{array} $	5	$\frac{S_2}{5} = \lambda f_2$	$\sigma^2 + \frac{4}{5} \sum_{i=1}^{VI} b_i^2$
त्रुटि	n ==Se	15	$\frac{S_e}{15} = Me$	o ²
कुल	$ \begin{array}{ccc} \operatorname{VI} & D \\ \sum_{i=\lambda} & \sum_{j=A} (\gamma_{ij} - \overline{\gamma})^2 \\ = S \end{array} $	23		

^{*} यह राशि S_c S_2 और S_1 के योग को S में से घटा कर प्राप्त की जाती है। $S_c = S_c = (S_1 + S_2)$

६ २०९ परिकल्पनाओं की जाँच

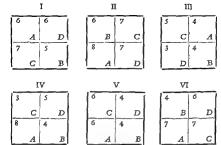
तब ν_{r} सुन्य के बराबर है इस परिकल्पना के बतर्षत M_{r} और M_{r} रोगा ही σ^{2} है प्राक्कलक है और $\frac{N_{r}}{G^{2}}$ करबा χ_{s}^{2} और χ_{B}^{2} वर है। इस कारण $\frac{M_{1}}{M_{c}}$ $\frac{M_{2}}{M_{c}}$ है। $\frac{M_{1}}{M_{c}}$ है। $\frac{M_{1}}{M_{c}}$ है। $\frac{M_{1}}{M_{c}}$ है। $\frac{M_{1}}{M_{c}}$ है। $\frac{M_{1}}{M_{c}}$ है। $\frac{M_{2}}{M_{c}}$ है। $\frac{M_{1}}{M_{c}}$ है। $\frac{M_{2}}{M_{c}}$ है। $\frac{M_{1}}{M_{c}}$ है। $\frac{M_{2}}{M_{c}}$
हुसी प्रकार यदि हम यह जीवना चाहें कि क्लांको के उपजाउराम में कुछ श्रवर है जपका नहीं तो $\frac{M_b}{M_s}$ के $F_{a,ts}$ चर होने का उपयोग किया जायगा t अधिकतर हस प्रकार की जीव मही होती t यदि यह यह चीच करता है तो ने बस्न यह जान के किए कि प्रयोग में उल्लंको के निर्माण के कुछ लाम हवा जयवा नहीं t

हम सह पहिले ही देख चुके हैं कि $\overline{y}_j - \overline{y}_j'$ का प्रत्याशित सात $\nu_j - \nu_j'$ है। यदि $\nu_j = \nu_j'$ हो तो। $(\overline{y}_j - \overline{y}_j')$ एक $N\left(0, \frac{\sigma}{\sqrt{\delta}}\right)$ चर होगा। इस प्रकार हम ν_j और ν_j' के दाजर होने की परिकल्पना की जोच कर तकते हैं।

६ २०१० उदाहरण

१ २०१०१ अकिडे

नीचे एक उदाहरण द्वारा यह सारा तरीका विस्तारपूर्वक समझाया गया है। इसी सक्तो क्षारा जो पहिले विमा, विभिन्न प्लॉटो की श्रेक्षित पैदावार y, विसलायी गयी है।



परिकलन के लिए इन औकड़ो को नीचे दी हुई सारणी के रूप में रख दिया जाता है। सारणी सख्या 20-2

0141 (441 202								
ब्लाक । किस्म /	1	11	ш	IV	v	VI	णा जोड ♥1 _ ∑ 1/1	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	
A	6	8	4	8	6	7	39	
В	5	6	4	4	4	4	27	
С	7	7	5	3	6	7	35	
D	6	7	3	5	4	6	3 r	
D जोड ∑ Y₁₁ 1≈A	24	28	16	20	20	24	$= \sum_{i=1}^{132} \sum_{f=A}^{132} \gamma_{if}$	

६ २०.१० २ विश्लेषण

$$\begin{split} S_{j} = & \text{with} \quad \forall \vec{v} - \vec{v} | \vec{v} = \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=A}^{N} (y_{j} - y_{j}^{2})^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \sum_{l=A}^{N} \vec{y}_{j}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=A}^{N} \vec{y}_{j}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \left[\sum_{l=1}^{N} \sum_{j=A}^{N} y_{l} \right]^{2} \\ &= \sum_{l=A}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \left[\sum_{l=1}^{N} \sum_{j=A}^{N} y_{l} \right]^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \left[\sum_{l=1}^{N} \sum_{j=A}^{N} y_{l} \right]^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \left[\sum_{l=1}^{N} \sum_{j=A}^{N} y_{l} \right]^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=A}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=A}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=A}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} + \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} + \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} + \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} + \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} + \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} + \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l} \right\}^{2} \\ &= \sum_{l=1}^{N} \left\{ \sum_{l=1}^{N} y_{l}$$

$$\begin{split} S_2 &= \Im \pi \mathsf{T} \underbrace{- \Im \pi^2 \pi}_{\mathbf{T}} \pi^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \Pi^{\frac{1}{2}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \gamma^2}_{j=1} - \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \gamma^2}_{j=1} \\ &= \frac{1}{4} \left[(24)^2 + (28)^2 + (15)^2 + (20)^2 + (24)^3 \right] - \frac{1}{24} \left(132 \right)^2 \\ &= 748 - 726 \end{split}$$

$$\begin{split} S &= \underbrace{\mathbb{E}^{\nabla}}_{[0]} \, \forall \vec{r},$$

$$S_t = S - S_1 - S_2$$
= 52 00 - 13-33 - 22.00
= 16 67

सारणी सख्या 20-3

Merch and and different									
विचरण का उद्गम	वर्ग-योग	स्वातत्र्य सस्या	वगं-माध्य	अनुपात	िना 5% मान *				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)				
विस्म	S2=13.33	5	$M_1 = 4.443$	$\frac{M_1}{\widetilde{M}_4}$ =4.03					
হলাঁপ	S ₈ == 22 00	3	M ₂ =4 400	$\frac{M_2}{M_4} = 3.96$	2.90				
স্বৃতি	Se=16.67		Me= 1.110						
बुल	S=52.00	23			[

इस प्रकार ब्लॉकों का अतर और किस्मो का अतर दोनो ही अर्थ पूर्ण है।

िक्सो भी क्लोंक के भेदाओं के जोड का प्रसरण 40° होगा। इसिलए किन्ही की क्लोंकों के प्रेक्षण-क्षिणों में $2\times t\times \sqrt{4M_b}$ से अधिक अवर होत्से हम एसे वर्ष पूर्ण समझें। (देखिए \S १० ६) यहाँ z का अप है t_{to} का $2\times 5\%$ चिंदु जिसका मान 2×12 1 है। (देखिए सारणों सक्या १० १) दो ब्लॉकों के प्रभावों में बास्तिक अवर क होते पर उनके प्रेक्षण-पीगों के अन्तर के $2\times 1\times 13\times \sqrt{4\times 110} = 896$ से अधिक होते की प्राप्तिक ता पांच प्रतिशत से क म है। इस प्रकार से ब्लॉकों की तुल्ला के दिश निम्मिलित रूप में एस सकते हैं

II (I VI) (IV V) III

यहाँ दो ब्लॉको को एक कोच्छ में रखने का खर्व है जनकी बिलकुरू समानता । ब्लॉको को उपन के अनुसार कमबद्ध कर लिया गया है । ब्लॉक II में प्रेसित उपन सबसे आंधन हैं । परसु यह I,VL,IV अथवा V की उपन से साहियकीय दृष्टिकोण

^{*} देखिए सारणी 11.1

से इतनी अभिक यही नहीं है कि वतर को अनंपूर्ण समझा जाय । क्रेनल II और III में अतर सारपूर्ण समझा जा सकता है क्योंकि यह अतर 8,96 से अधिक है। जिन क्योंकों में साह्यसमैय दृष्टिकोण से अर्थपूर्ण अंतर नहीं है उनके ऊमर लिखित सकेत के अनुसार एक मोटी खकीर सीन देते हैं।

इसी प्रकार दो किस्मो के प्रेक्षणों के योगी का अंतर अर्थपूर्ण होना यदि वह ≥× 2-131× √6×1110=11.00 से कम न हो।

इस प्रकार *A C D B*

अपाँत् A, C और D में कोई अर्थ-पूर्ण अतर नहीं है। इसी प्रकार C, D और B में कोई अन्तर नहीं है परतु A और B का खतर अर्थ-पूर्ण है। प्रेक्षणों के आधार पर उपज के अनुसार इन चार किस्मों का कम A, C, D और B है।

§ २०.११ ब्लॉक

यद्यपि अधिकतार प्रयोग अभिकल्यभाएँ आरम में सेती के प्रयोगों के लिए ही तीच कर निकामी गर्यी भी पहु हन्हीं अभिकल्यमाओं का अन्य सेवा में भी उपयोग होता है। उत्तहस्य के लिए स्ट्रांक के एक प्रयोग में एक साथ पैदा हुए सुकर के वकतों के सनुह का एक क्लीक की तरह उपयोग अभिकल्या था। अत्रीक शब्द करा प्रयोग अभिकल्यामां में भूमिन्दाड में लिए ही गही बल्कि किसी भी ऐसे प्रायोगिक इकाइयों के समूह के लिए किसा जाता है जिसके अबर क्लाइयों को याद्यिक्टिकेटण द्वारा उपचारों से साथ उसुकत किया जाता है। इनको समुखें समस्टि को जुलना में अधिक समाग (homogenous) होना जातिए।

प्रयोग के निरुत्यम्य में बादि हुम यह पायें कि अतर-कार्क वर्ग-माध्य और शुटि-पर्ग-माध्य का अनुमात अर्थपुण है हो यह समझा वा नकता है कि कार्क का नामा अनि-करना में जाभरामक सिक्ष हुमा है। यदि यह अनुपात अर्थपुण नहीं हो तो के वाध्यित् यह कार्क बताना बेकार या अववा सक्षत विशेष काम नहीं हुआ। यह ब्यान देने योग्य काम है कि बादि पिछले प्रयोग में क्लॉक नहीं बनाये जाते तो अतर-कार्क-प्रयरण भी जुटि वर्ग साध्य में निरु जाता और यह समन व्या कि किस्मी की अ्थल का अतर जो इस समोग के द्वारा अर्थ-पूर्व कहाराम बया है—बिना क्लॉक के प्रयोग के कर्यहीन साझ। जाता। इस क्लार कर्जोक निर्माण का प्रयोजन प्रयोग को अधिक बुवाही बनाना है।

अध्याय २१

लैटिन-वर्ग ग्रभिकल्पना

(Latin Square Design)

§ २११ प्रयोग को सुग्राही बनाने का प्रयत्न

५ २१.२ उदाहरण

है जो रोज का हिसाव रखते हैं । ऐसे लोगो को हिसाब कैवल अनुमान से ही बताना पड़ेगा । इस दद्या में चूटि होना प्राय अनिवार्य है ।

यद्यांग गलती को विलक्षुल हटा देना असमन है, परतु हम जानते हैं कि इस बृदि को दो उपादान प्रभावित करते हैं। एक वो है निर्दिप्ट काल (teference persod)। यदि आप केवल पिछले दिन के सर्व के बारे में पूछे तो उससे जितनी गलती होगी वह पिछले सप्तवाह, पिछले पत्रवारे जपाय पिछले मह के सर्व के कि कि जाता गलती होगी वह पिछले सप्तवाह, पिछले पत्रवार परवाह कर स्वेचण पर भी निर्माद है कि वह किस प्रकार फर पूछता है। भिन्न-भिन्न प्रकार के पहर गूछने से भिन्न-भिन्न प्रकार के उत्तर मिलेंगे। उदाहरण के लिए आप एक तो सीचे-सीचे यह पूछ सकते हैं कि विष्ठ के महीने करते पर किराय स्वाद के लिए आप एक तो सीचे-सीचे यह पूछ सकते हैं कि विष्ठ के महीने करते पर किराय स्वाद के लिए अप एक तो सीचे-सीचे यह पूछ सकते हैं कि विष्ठ के महीने करते पर किराय स्वाद के लिए अप एक तो सीचे-सीचे यह पूछ सकते हैं कि विष्ठ के महीने करते पर किराय सार्व में पूछा पर किराय सार्व करते हम स्वत्व वहाँ के लिए से भी पूछा पर पिछले महीने करते हम सार्व सार्व करते हम सार्व करते हम सार्व स

यदि किसी मनुष्य के पास एक एक दिन का प्रशंक एक का खनों किसा हुआ है तो सीनो प्रकार से प्रकल करने पर एक ही उत्तर मिलेगा। परतु जक्तर विद बाद-बात पर ही आंशित है तो एक ही मनुष्य इस तीन प्रकार से प्रकल करने पर भिक्ष-भिन्न जतर वे सकता है। इसके अलावा एक ही प्रकार के प्रकल करने पर भी एक ही मनुष्य भिन-भिन्न विस्तियों में निगद-निग्न जलर वे सकता है।

षचें के सबय में हुए सर्वेदायों में विभिन्न निर्दिष्ट कार्जों और प्रस्त पूछने के भिन्न-मिन्न तरीकों का प्रमोग होता रहा है। अब प्रक्त यह उठता है कि क्या इन सर्वेक्षणों के फाँग की तुलना की जा सकती है। भाग किजिए एक सर्वेद्यण उत्तर प्रदेश और एक महास में होता है। नया हम इन दो सर्वेद्यणों की गत्त है यह चान सकते हैं कि महास और उत्तर प्रदेश के छोगों की सर्वे की जावत जितनी मिन्न हैं? यदि हम यह जानत हो कि इन दो सर्वेदाओं में जिन्न-जिंव निहिष्ट काल और प्रस्त पृक्षने के मिन्न-भिन्न तरीकों का उपनीम किना मागा था, और इसके साथ यह भी जानते हो कि निर्दिष्ट काल और परिकों के मिन्न होने से सुकान में सचमुच जातर पण जाता है दो इस प्रस्त का उत्तर

S २१.३ ऑकडे

मान लीजिए, हमें चार निर्दिष्ट समयो और चार प्रस्त पूछने के तरीको का अध्ययन बरता है। इसके लिए एक प्रयोग किया जा सकता है जिसमें चार व्यक्तियो पर चारों निर्दिष्ट काओ और प्रकृत पूछने के चार तरीको का प्रयोग करके देखा जा सकता है। यथा पर प्रकृत के प्रयोग में कुछ दोग है जिससे यह तुलना अमात्मक हो सकती है परतु इस अभिकल्पना को और उसके विश्लेषण को समझने के लिए यह उदाहरण पर्योग्त होगा।

हम उन मनुष्यों को जिन पर प्रयोग विद्या गया है A, B, C और D से सूचित करों। प्रश्न पूछने के तरीकों को सस्याओं से और निर्दिष्ट-कालों को I, II, III औरIV से मूचित किया जायगा। सारी अभिकल्यना को नीचे दिये तरीके से सारणीमें राजा जा सचता है।

सारणी सरवा 21 1

निविष्ट कास्त्र प्रश्न का तरीका	ī	п	m	IV	कुल	माध्य		
(1)	(2)	(3)	(4)_	(3)	(6)	(7)		
I	A 50	B 110	C 30	D 200	390	97'50		
2	D 190	l I	B 95	C 30	377	94*25		
3	B 90	C 32	1	A 56	373	93*25		
4	C 28		A 54	B 100	402	100,20		
कुल	358	424	374	386	1542			
माध्य	89.20	106 00	93.50	96 50		96-38		

§ २१.४ लैटिन वर्ग

इस ऊपर नी सारणी में आप देखेंगे कि एक नगे है जिसे चार पनितयो (rows) और नार स्तभो (columns) द्वारा सोलह मामो में बाँटा हुआ है। इन मागो में चार अक्षर A, B, C और D जिले हुए है। इनको इस प्रकार बाँटा गया है कि हर एक स्तम में एक बार बीर कैनल एक ही बार आवा है। इस प्रकार के नमें को लेटिन गमें (Laun square) करते है। इस प्रकार के नमें को लेटिन गमें (Laun square) करते है। इस प्रकार में पर्य है। इस प्रवार में एक स्वर्थ है। इस प्रवार में एक देश है। इसी प्रवार क्षर के प्रवार स्तम है। इसी प्रकार 5×5, 6×6, 9×9 इस्वादि विचन्न परिसाणों के लेटिन वर्ग होते है।

§ २१.५ विश्लेपण

हर एक भाग में अक्षर के अतिरिक्त एक तक्या भी दी हुई है जो एक मास में हुए हुल खर्च की सूचित करती है। यह तीन उपावानी (factors) पर निर्मर करती है, (१) ध्यक्ति (२) निर्विष्ट काक (३) प्रका का तरीका। इसके अलावा हुछ तुर्टि और रह जाती है जिसको एक उदावान्य चर मान कर पिछले प्रयोग की सेयह विश्वरण किया जा सकता है।

$$S_1$$
 =अतर-निर्विष्ट-काल वर्ष-सोग = $\frac{(358)^6 + (424)^2 + (374)^2 + (386)^2}{4} - \frac{(1542)^2}{(1542)^2}$

$$= \frac{596,812}{4} - \frac{23,77,764}{16}$$

$$S_a =$$
 अतर-प्रश्न-विधि वर्ष-योग =
$$\frac{(390)^2 + (377)^2 + (373)^2 + (402)^2}{4}$$

उन सब कामों की संस्थाओं का योग जिनमें A है = 222 उन सब बालों की संस्थाओं का योग जिनमें B है = 395 उन सब बालों की संस्थाओं का योग जिनमें C है = 120 उन सब बालों की संस्थाओं का योग जिनमें D है = 805

ं.
$$S_1 =$$
 वतर-व्यक्ति चर्ग-योग= $\frac{(222)^2 + (395)^2 + (120)^2 + (805)^2}{4}$

$$- \frac{(1542)^2}{16}$$
== 216,983 50-148,610 25

$$S = \frac{68,373 25}{400}$$

$$= \frac{68,373 25}{(50)^{2} + (100)^{2} + (20)^{2} + (28)^{2} + (110)^{3} + (62)^{2} + (32)^{2} + (20)^{2} + (30)^{2} + (95)^{8} + (105)^{8} + (54)^{8} + (200)^{2} + (30)^{8} + (56)^{8} + (100)^{8} - \frac{(1542)^{8}}{16}$$

$$= 217,754 00 - 148,610 25$$

= 69,143 75 Se=S-(S₁+S₂+S₃)=69,143 75-(592 75+130 25+68,373 25)

==47 50 इन सब परिवालनों को प्रसरण-विश्लेषण सारणी के रूप में रखा जा सकता है।

सारणी सख्या 212 जिन्ह्या अधिकासम्बद्धाः विकास

	संदिन-वर्गे अभिकल्पमा के लिए प्रसरण-विश्लेपण									
विचरण का उदगम	स्वातत्र्य संस्पा	धर्म-योग	दम माध्य	अनुपात	⊬ का 5% मान					
(1)	(2)	(3)	(4)	(s)	(6)					
निर्दिष्ट समय	3	S1=592 75	M ₁ =197 58	$\frac{M_1}{M_e} = 24.95$	4 76					
प्रकृत विधि	3	S2=130 25	M ₂ =43 42	$\frac{M_2}{M_c} = 5.48$	4 76					
व्यक्ति	3	S ₂ ==68373 25								
সূতি	6	S==47 50	Me=7 92							
कुल	15	S=69 143 75								

निर्दिष्ट काछ और प्रका विधि दोनो के लिए प्रसरण अनुपात अर्थपूर्ण है नयों कि F_{2n} का पाँच प्रतियत जिंदु 4 76 है। (देखिए सारणी सक्या 11.1) बास्तव में निर्दिष्ट काल के लिए अनुपात तो बहुत अधिक अर्थ-पूर्ण है नयों कि यह F_{2n} के 0 1 प्रतियत्त विद्व 23.70 से भी अधिक है। इस कारण अब हम प्रका के तरीजो ने गुम्मो और निर्दिष्ट कालों के युम्मो की तुल्ला करना चहिंगे।

यदि हम दो निर्दिष्ट कालो को तुलना करना चाहूँ तो इसके लिए हमें उन दोनों निर्दिष्ट कालो के लिए तो याच्य है उनका अंतर लेना होगा । क्योंकि ये दोनो माध्य चार चार प्रेत्राणों पर आयारित है इस कारण इनके प्रतरण $\frac{\sigma^2}{4}$ हैं जहां σ^1 एक अकेले प्रेत्रण का प्रसरण है। इस कारण इनके अंतर का प्रसरण $\frac{\sigma^2}{4} + \frac{\sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}$ हैं 1

यदि इनके अन्तर X का माध्य कृत्य हो तो $\dfrac{X}{\sigma/\sqrt{2}}$ एक प्रसामान्य N(o, z) चर समझा जा सकता है। इसके अतित्वत (त्रुटि गर्ग योग) $+\sigma^a$ एक χ^a_σ चर

है इस कारण $\frac{X}{\sigma/\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{9/2}}{\sigma}$ वर होगा।

मिंद t_a के पाँच प्रतिशत बिंदु को t से सुचित किया जाय तो x का मान $t\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ वर्ष साध्य से अधिक होने पर हमें X के माध्य के शून्य होने में सदेह होगा।

कार की सारणी (21.2) में वृद्धिनर्ग-माध्य = $792 \frac{2}{5}$ । अत $\sqrt{\frac{2}{3} \frac{2}{6} \frac{2}{1}}$ = $2.447 \times \sqrt{\frac{292}{2}}$ = 4.87

इस प्रकार निर्दिष्ट कालो के लिए

4 I 2 3

(देखिए सारणी सल्या 21.1)

६ २१.६ साधारण

लैटिन वर्ग अभिकल्पना का प्रयोग खेती सबधी प्रयोगी में अधिक होता है। उसमें वास्तव में धरती पर ग्रह वर्ग बनाया जाता है और पौधो की जिन किस्मो की तलना करनी हो उन्हें इस प्रकार लगाया जाता है कि हर एक पक्ति और हर एक स्तम्भ में एक विस्म केवल एक ही बार बोयी जाय। इस प्रकार के प्रयोग का विश्लेपण उदाहरण में दिये हुए ढग से किया जाता है। ऊपर के प्रयोग में यदि यादि छनीहत बलॉफ-अभिकल्पना का उपयोग किया जाता तो हम एक प्रयोग द्वारा केवल एक ही परिकल्पना की ऑन कर सकते थे--तरीके से सवधित अथवा निर्दिष्ट काल से सर्वाधत । परन्त लैटिन-वर्ग के रूप में एखने से इन दोनों ही परिकल्पनाओं की गाँच

एक ही प्रयोग के विश्लेषण की सहायता से की जा सकती है। खेती सबधी प्रयोगो में इसका उद्देश्य किस्मो के प्रभाव को दो अलग-अलग प्रभावो, पक्ति-प्रभाव और स्तम्भ प्रभाव से मुक्त करना होता है। उनमें हम केवल एक ही परिकल्पना की जाँच करना चाहते है- वह यह कि किस्सो में कोई विशेप अन्तर नहीं है। इस प्रकार आपने देखा कि इस प्रयोग-अभिकल्पना का अलग-अलग उद्देश्यो

से उपयोग किया जा सकता है, परन्तु विश्लेषण की विधि वही रहती है।

अध्याय २२

बहु-उपादानीय प्रयोग

(Factorial Experiments)

९ १२.१ परिचय

अब तक आप यह समझ ही गये होने कि किसी प्रयोग को अनेक उपादान प्रभावित गर सकते हैं। यदि वे प्रभाव संयोज्य (additive) हो तो हम इनको एक एक करके माप सकते है। उत्पर के प्रयोग में यदि हम वैचल एक ही व्यक्ति से एक ही निविष्ट काल के सबय में विभिन्न तरीकों से प्रश्व करते तो उसमें उतार प्रधानत मैंबल तरीकों के भिन्न होने के कारण आता और औसत अतर के बन्य-प्राय होने की परिकल्पना की जाँच की जा सकती थी। इसी सिद्धान्त का उपयोग बादिकाकीशृत म्लॉन अभियत्या में भी किया जाता है। परन्तु वो उपादानो के महत्वपूर्ण होने पर इस प्रकार के प्रयोग क्वचींले हो जाते हैं और हमें कैटिन वर्ग इत्यादि अन्य प्रयोग-भौभिकरपनाओं की बारण लेनी पडती है। परम्तु इनका विश्लेषण उस दशा में ही सतोपजनक हो सकता है जब इनके प्रभाव सयोग्य हो। उत्पर के जवाहरण में यह मभय है कि विशेष प्रस्तविधि का प्रभाव विभिन्न व्यक्तियों पर अलय-अलग हो । पह भी हो सकता है कि विभिन्न प्रश्तविधियों के सुयोजन में एक ही निर्दिष्ट काल का थलग-अलग प्रभाव पहता हो । ऐसी दशा में जब उपादानी का प्रमाय संयोज्य न ही सब एक ही प्रश्न के लिए यह पृथक प्रयोग करना सम्भव नही है। या तरे प्रयोग से किमी प्रश्न का भी सतीपजनव उत्तर नहीं विलेगा अवद्या कई उपादानों के विपय में बहुत से प्रश्नों का उत्तर एक साथ ही मिल जायगा।

पद्मिष हम कुछ बिशेष उपादानों का अध्यतन करना अधिक उपयुक्त और आनस्यन समझते हो तथापि बहुषा यह कहना कठिन होता है वि इनमें से सबसे अधिक महत्वपूर्ण कौनना है। हुमें पहले से यह बात होना भी समन नहीं कि एक उपयोगी के अभाग दूसरे उपयोगों के प्रभाग संवर्ग मनतन है बनमा नहीं। जन कुछ विशेष उपरादानों को प्रयोग के किए चुना आता है तो तसका करण यह नहीं। जन कि में दी सबसे अधिक महत्त्वपूर्ण है बन्नि केनल अह कि हन उपादानों पर अधिक आसानी से नियनण निया जा सकता है और इनको सरळता से नापा जा सकता है। कीई भी जिटल मशीन खयना लीचोंगिक प्रणाली अवस्य ही अन्य उपादानी से भी प्रमानित होती होगी। मजदूर, मशीन खया कच्चा मान्या सोनों में से किसी भी एक का प्रभाव अन्य दोनों उपादानों के प्रभाव अन्य दोनों उपादानों के इस प्रभाव के जुड़ा हो सकता है। दो उपादानों के इस प्रभाव होने को परस्य-क्रिया (interaction) करते हैं। किसी भी उपादान के प्रभाव को पूर्णक्य से समझने के लिए यह आवश्यक है कि अन्य उपादानों से उसकी परस्य-निव्या का भी जान हो। यदि उपादानों के लिए कल्य-जलग जीच होती है तो इसका कारण यह नहीं है कि इस प्रकार खल्य जीव करता उपयुक्त स्वातिक रीति है। बहुवा गलती वे यह मान लिया जाता है कि एक साथ स्वा

हम नीचे खेती सबधी एक बहु-उपादानीय प्रयोग का वर्णन करेंगे जिससे हमें यह पता चरेगा कि एक साथ अनक उपादानी के सुख्य प्रमास (main effect) को तनके प्रत्यन-किव्याओं (meractions) की किस प्रकार नापा जाता है, और कैसे उनके जन्म-पाय होने की परिलच्छा की जीच की जाती है।

§ २२.२ बहु-उपादानीय प्रयोग के लाभ

एक नये किस्स के चावल की विदेशों में बहुत चर्चा है और उसे भारत में प्रवेश कराने की योजना बनायों जा रही है। बावकरू जिन किस्सों के चावल भारत में बोये जाते हैं उनसे यह किस्स बारतव में श्रेटक है अवचा नहीं, यह विचवल चर्च में नहीं कहा जा बचना। यहाँ प्रेटका स्वाद नहीं अवह विचवत के दिल्ला पे सामी जारा दिलें हैं। यहाँ प्रवेश किस्स विवाद के दिल्ला पे सामी जारा दिलें हैं। विवाद के दिल्ला हैं। इक्कें अतिरिक्त यह भी पता नहीं कि चावल को बोने, उत्तमं जल बेने और बेब्साल करने आदि की संबेश के विवाद के साम किस के साम के बाव किरानी मात्रा में देना सर्वोत्तम होंगा, यह भी सोल कर पता लगाने की बात है। यह हो सकता है कि कोई खाद किसी करने के चावल के छिए और कोई खाद किसी कुरती है कि मोवल के छिए और कोई खाद किसी चूनरी है कि पावल के छिए और कोई खाद किसी के पावल के छिए और कोई खाद किसी के दिल्ला होंगा। यह सी हो सकता है कि पीण को प्रसुत्त हो। यह सी हो सकता है कि पीण को दूर-दूर दोने पर जी किस सबसे अधिक उपन देती है वहीं पोर्गों को पास पास बोने पर क्लिटर सिद्ध हो।

ऐसी दशा में बोने की कियी विशेष रीति और खाद को छकर यदि किरने की तुलना की जाय तो यह भ्रमाराक होगी। यह समय है कि उपादानों में परस्पर किया न हो। उपादानों, किस्म, बोने की रीति और खाद के प्रभाव वास्तव में उपोज्य हो। परन्तु फिर भी एक बहुचणदालीय प्रयोग के युवाबके में काटम-अटम उधाराती के किए सक्ता-अरका प्रयोग करना कम दश (efficient) है। इसका कारण यह है कि यहु-उधारानीय प्रयोग में एक ही ध्वाँट का उठना-अरुग व्यादाना के प्रमाव को अतिन के तिरह अरोक बार उपयोग करना होता है।

जराहरण के किए मांग की बिए कि एम प्रयोग में तीन जगातान है, जितमें से मरोक के दोनों स्तर (level) है। इस प्रकार कुछ 2×2×2=8 सवय इस जगाता के स्तरों के होंगे। बदि प्रत्येक सकय वर गांच बार प्रयोग किया जाय तो कुछ 8×5 = 40 प्लॉटा को आवरववता होंगो। विसी भी एक उपादान के मुख्य अभाव के किए जन 20 प्लॉटो के प्रेमणों के माध्य की सुक्ता जितने वह उपादान एक विशेष स्तर पर है, उन अप्य २० प्लॉटो के प्रेमणों के माध्य से गी जागारी जिनमें यह इसरे स्तर पर है। उन अप्य २० प्लॉटो के प्रेमणों के माध्य से भी जागारी जिनमें यह इसरे स्तर पर है। वस हम जला-मक्ता उपादानों के किए अकता-अलग प्रयोग करें जितमें मुख्य प्रमाय का इसी प्रकार 20 प्लॉटो के माध्या के अतर द्वारा प्रावक्तल किया जाय तो कुछ 40×3=120 फांडों को आवस्थवता होगी। यही नार्य एग बहुज्यातालीय प्रयोग में केवल 40 प्लॉटो क्वार साम होता है।

🞙 २२३ मुख्य प्रभाव और परस्पर-किया

विभिन्न स्तारी पर हुंबरे उपावानों के सहसीम से जरास कियी एक उपावान में ममानों के मान्य नो इस उपावान का मुख्य प्रभाव (man ब्रीटा) कहते हैं। इसार के उदाहरण में मान कीजिए कि वो किस्से V, और V, दो बोने के तरीके S, और S, और दो जात M, और M, हैं। ये सीना उपावान दोनों स्तर्रा पर है। इन उपा-वानों के तिम्नाशितित 28-28 सच्या हो सकते हैं।

(1) V2 S1 M1 (2) V2 S1 M2 (3) V2 S2 M1 (4) V4 S2 M2

(5) $V_1 S_1 M_1$ (6) $V_1 S_1 M_2$ (7) $V_1 S_2 M_1$ (8) $V_1 S_2 M_2$

पदि इस बाह सचती की एक ब्लॉफ से आठ क्लॉटा में याद्विश्वकीकरण हारा बीटा जारा दो होने नाल प्रदेशकार पर सचना के प्रमान और कोटा के प्रमान का गोग होंगी ℓ अपूर्णिक नेकिय्य के स्वारण क्लॉफ स्वारण करके तक्ष्य के लिए समान है। हमारे प्रतिकाश के जनुसार ग्रह प्रमान \in एक N(0,o) चर है। मान की नित्र एक का कोर प्रमान हमारे प्रतिकाश के जनुसार ग्रह प्रमान \in एक N(0,o) चर है। मान की नित्र एक कोर में प्रतिकाश के जनुसार ग्रह प्रमान \in एक N(0,o) चर है। मान की नित्र एक कोर प्रमान के जन्म (V_2 S, M_1 का उपयोग हमा है उसकी उपज (V_2 S, M_2) है।

द्वादिए दुन दो सचयों के प्रभावों के अवर का प्राक्तकल $\Longrightarrow(V_2,S_1M_2) \cdots (V_1-S_1M_2)$ परतु दन दोनों सचयों में बोने के तरीके और बाद समान है। इसिएए इन सचयों के प्रमाव के अवर को किस्सों का प्रभाव समझा जा सकता है। वयोंकि यह समाब अन्य दोनों उपादानों के दिस र पर भी निर्मर कर सकता है दुर्शालए दुस प्रभाव को $V \mid S_1M_2$ से सूचित किया जायगा। इसी प्रकार हम $V \mid S_2M_2$ स्था $V \mid S_3M_3$ से परिताया कर सकते हैं। किस्स के इन चार प्रभावों के माध्य की यो अन्य उपादानों के विभिन्न स्तरों पर होते हैं, हम किस्स का मुख्य प्रभाव कहते हैं

इस तरह V का अनिमनत प्राक्कलन \hat{V} निम्नलिखित है

$$\hat{V} = \frac{1}{4} \left[\{ V_2 S_1 M_1 \} - V_1 S_1 M_2 \} + \{ (V_2 S_1 M_2) - (V_1 S_1 M_2) + \{ (V_2 S_2 M_1) - (V_1 S_2 M_2) + \{ (V_2 S_2 M_2) - (V_1 S_2 M_2) \} \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} (V_2 - V_1) (S_2 + S_1) (M_2 + M_1) \dots (22.1)$$

इस प्रकार उन सब प्लॉटो की पैदाबारो के योग में से जिनमें V_2 का प्रयोग हुजा है अन्य प्लाटों की पैदाबारों के योग को पटाने और कुल उन प्लॉटो की जिनमें V_2 बोबा गया है सप्या से विभाजित करने पर हुमें V_2 और V_2 के प्रभावों के औरत अतर V के प्रभावों के औरत अतर V का प्रमक्तन प्राप्त होता है।

इसी प्रकार अन्य उपादानी के मुख्य प्रभावी की परिभाषा की जा सकती है।

$$\hat{S} = \frac{1}{4} (V_2 + V_3) (S_2 - S_1) (M_2 + M_3)$$
(22.2)

$$\hat{M} = \frac{1}{4} (V_2 + V_1) (S_0 + S_1) (M_2 - M_1)$$
(22.3)

यदि (Y_1, S_1, M_1) इत्यादि एक ब्लॉक के एक प्लॉट की पैदानार नहीं ब्रिल्क b क्लोंकों के एक एक प्लॉट बानी कुल b प्लोंडों की पैदानार का नाम्य हो ती इनमें से प्रत्येक का प्रस्तय $\frac{b}{b}$ तामा उत्पर के तीनी प्राक्तलकों के प्रसरण

$$\frac{1}{(4)^2} \times 8 \frac{\sigma^2}{b} = \frac{\sigma^2}{2b} \stackrel{\circ}{\epsilon} 1$$

मान कीजिए, हम $V \mid S_2 M_1$ के प्राक्कतक में से $V \mid S_1 M_1$ के प्राक्कतक की घटाते हैं। यह $S_2 M_1$ तथा $S_1 M_1$ पर V के प्रमानों के अंतर का प्राक्कतक होगा।

इस अतर से यह पता घलता है कि खाद का स्तर M_1 होने पर बोने की विधि का किस्स के प्रभाव पर क्या असर पदता है। इसी प्रकार बाद का स्तर M_2 दिया होने पर हम एक अप्य अतर को प्राप्त कर सकते हैं। इन दो अतरों के माध्य को दो से विभागित करने पर हम जो राशि किलती है उसे हम किस्स और बोने की विधि की परस्पर-क्यिया (interaction) VS का प्राक्तकक कहते हैं। इस प्रकार

$$\widehat{VS} = \frac{1}{4} \left[\{ (V_2 S_2 M_1) - (V_1 S_2 M_1) \} - \{ (V_2 S_1 M_1) - (V_1 S_1 M_1) \} \right]$$

$$+\{(V_1 S_1 M_1)-(V_1 S_1 M_2)\}-\{(V_1 S_1 M_2)-(V_1 S_1 M_2)\}$$

$$= \frac{1}{4} (V_2 - V_1) (S_2 - S_1) (M_1 + M_1)$$
 ... (22.4)

इसी प्रकार VM और MS के प्राक्कलक निम्नलिखित होचे

$$\widehat{VM} = \frac{1}{4} (V_2 - V_1) (S_2 + S_1) (M_2 - M_1)$$
(22 5)

$$\widehat{SM} = \frac{1}{4} (V_2 + V_1) (S_1 - S_1) (M_2 - M_1) \qquad \dots \dots (22 6)$$

में तीनों डि-उपादामीम परस्पर-त्रियाएँ है वर्षोंकि इनमें केवल दो उपादानों के एक दूसरे पर प्रभाम का जिवार किया गया है। यदि हम खाद का स्तर M₂ दिये होने पर किस्म और बोने की विधि की परस्पर-त्रिया

$$\widehat{VS} \mid M_2 = \frac{1}{3} (V_3 - V_1) (S_2 - S_1) M_2$$

तमा खाद के स्तर M_1 पर किस्म और बोनो की विधि की परस्पर-त्रिया

$$VS \mid M_1 = \frac{1}{2} (V_2 - V_1) (S_2 - S_1) M_1$$

के अतर को छें तो यह किस्म और बोने की विधि की परस्पर-किया पर लाद के प्रभाव का प्रावन लक है। इस अतर को दो से विभाजित करने पर हमें त्रि-उपादानीय पर-स्पर किया VMS का प्रावकलक प्राप्त होता है।

$$\widehat{VMS} = \frac{1}{4} (V_z - V_1) (M_z - M_1) (S_z - S_1) \qquad ... (22.7)$$

यह ध्यान देने की बात है कि परस्पर-कियाओं के उपादानों का कमस्प्र (permutation) करने से कोई अंतर नहीं पडता। उदाहरण के लिए VS = SV असवा VMS = VSM = MVS इत्यादि। इसके अतिरिक्त मुख्य प्रभावी और परस्पर-कियाओं की परिभाषा इस प्रकार दी गयी है कि इन सबके प्रसर्प $\frac{1}{2h}$ है।

३ २२४ उदाहरण

वद आप यह तो समक्ष गये होंगे कि मुख्य प्रमावो और परस्पर-क्षियाओं का अनु-मान किस प्रकार किया जा सकता है। खेती सबयी प्रयोगों का मुख्य उद्देश्य भी यही होता है। परतु इसके अवाबा हम कुछ निराकरणीय परिकल्पनाओं की जॉच भी करना पाहिंगे किनका तार्थ्य यह जानना है कि मुख्य प्रभाव आदि के अनुमानों का सून्य से जो अतर है वह अर्थपूर्ण है अयवा नहीं। इस परिकल्पनाओं को खाँच के बाद हम उपा-दान-सचयों की उत्कृष्टता के अन में रख साईंगे।

इस जपर लिखित प्रयोग में हुल आठ उपचार है। इस सबको एक क्लॉक के आठ एलोटो में यादुण्डिकोकरण ब्रास्त बंदा जा सकता है। इस प्रकार के की रक्त के से हे में एक यादुण्डिकोइट क्लॉक-जीककरण कारात होती है। इसका कि कि से हमें एक यादुण्डिकोइट क्लॉक-जीककरण कारात होती है। इसका विश्वेषण किस प्रकार किया जा सकता है, यह तो आप जानते ही है। परतु जतर उपचार वर्ग-योग को हम फिर मुख्य प्रधानो और परस्पर क्रियाओं से सबिवत वर्ग-योगों में विधा-जित कर सकते हैं और इनमें से प्रवेक को F-प्रशिक्ष द्वारा जीना जा सनता है। मुख्य प्रभानों और परस्पर-क्रियाओं को स्वात्य-सब्धा केवल एक एक होने के कारण इनको I-परीक्षण द्वारा जीना अधिक संस्क है। यह सब किस प्रकार निया जायगा, यह निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पट हो जायगा।

सारणी संख्या 22.1 बह-उपादानीय प्रयोग के व्यक्ति

ſ	- व्लाक	_	_		1		1
1	उपनार	1	п	ш	ΙV	कुछ	माध्य
١	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
4	$V_1 M_1 S_1$	3	5	4	4	16	4
Ь	$V_1 M_1 S_2$	5	6	5	4	20	5
b	$V_1 S_2 M_1$	6	8	5	5	24	6
d	. 4 0 4 1 1 1	7	10	8	7	32	8
Ь	V ₁ S ₁ M ₂	5	7	7	5	24	6
a	V2 S1 M2	6	8	6	4	24	đ
4	V ₁ S ₂ M ₂	10	12	10	8	40	10
b	V2 S2 M2	14	15	11	8	48	12
	कु ल	56	71	56	45	228	
	माध्य	7 000	8 875	7 000	5 625		7125

६ २२,५ विश्लेपण

क्लॉक वर्ग-योग S1 =(56×7000)+(71×8 875,+(56×7000)

+(45×5 625)-(228×7 125)

=(392 000+630 125+392 000+253 125)-1624 500 =42 750

च्पचार वर्ग-योग S₂ ==(16×4)+(20×5)+(24×6)+(32×8)

$$+(24\times6)+(24\times6)+(40\times10)+(48\times12)$$
 $-(228\times7125)$
 $=64+100+144+256+144+400$
 $+576-1624$ 500
 $=1828$ 000-1624 500
 $=203$ 500
 $=(3)^3+(5)^3+(4)^2+(4)^2+(5)^3+(6)^2+(5)^3+(4)^3$
 $+(6)^3+(8)^3+(5)^3+(5)^3+(6)^3+(8)^3+(6)^3+(8)^3+(17)^3$
 $+(5)^3+(7)^3+(7)^3+(5)^3+(6)^3+(8)^3+(17)^3$
 $+(10)^3+(12)^3+(10)^3+(8)^3+(14)^3+(17$

=1804 000-1624 500

=269 500

-(228×7125)

त्रुटि वग-योग $Se = S - S_1 - S_2$

368

=269 500-42 750-203 500

== 23 250

सारणी सख्या 22,2 प्रसरण विश्लेषण सारणी

		_			
विचरण का उदगम	स्वातञ्य सस्या	वग-योग	वग माध्य	अनुपात	5%स्तर पर अथपूण मान*
(1)	(2)	(3)	(4)	(s)	(6)
म्लॉक ————————————————————————————————————	3	S1=42.75	M ₁ =14 25	$M_1 = 12.84$	3 07
उपचार	7	S ₂ ==203 50	M2==29 07	$\frac{M_2}{Me}$ =26 19	2 48
त्रुटि		Se=23 25			
कुल	3 L	S=269 50			

^{* * (}देखिए सारणी संख्या 111)

इन प्रकार हम देखते हैं कि उपचार और ब्लॉक दोनों के वर्ग-मोग अर्थपूर्ण है। वास्तव में ये पाँच प्रतिशत स्तर पर ही नहीं बल्कि o 1% स्तर पर भी अर्थपूर्ण है। अब हम उपादानों के मुख्य प्रभाव तथा परस्पर-क्रियाओं वा परिकलन निमन-

अब हम उपादानों के मुख्य प्रभाव तथा परस्पर-कियाओं का परिकलन निम्न-लिखित सारणी की सहायता से करते हैं।

सारणी संख्या 223

उपचार	ভদ্দ	(1)	(2)	(3)	मुख्य प्रभाव, परस्पर-क्रिया
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$V_1 S_1 M_1$	4	9)_	23	57	सब प्रभावों का योग
$V_2 S_1 M_1$	5)	14/	34/	5	4V
$V_1 S_2 M_1$	6	12	31	15	45
$V_2 S_2 M_1$	8)	22/	2)	1 3	4VS
$V_1 S_1 M_2$	6)	1	_5_	II	4M
$V_8 S_1 M_3$	6/	2/	10/	-1	4VM
$v_1 S_2 M_2$	101	0)	1	5	45M
$V_2 S_2 M_2$	12/	2/	2)	I	4VSM

ऊपर की सारणी में मुख्य प्रभावें। और परस्पर-िक्याओं का परिकरण करने की सरक रीति हो हुई है। प्रथम कारूम से उपचारों के नाम रे रहे हैं। इनकी एक दिवीप कम में सजाया गया है। पहिले V_* S. M_* जिससे में स्वत्य त्या है। पहिले V_* S. M_* जिससे केवल V का सूचनाक 2 है। उसके प्रथम त्यारा V_* S. M_* जिससे केवल V का सूचनाक 2 है। उसके वाद V_* S. M_* जिससे केवल V को रे S है। उसके बाद V_* S. M_* है जिससे V और V_* और V_* के अकेले और साय-साय सूचकाक 2 पाने के बाद M की बारी जाती है और अकेले उसका सूचकाक 2 रखा जाता है। उसके प्रकाल क्ष्मा V और V_* और V_* और V_* ते से V_* ते स्वत्य V_* ते से दूसरे रतभ में दन उपचारों के किए माध्य उपन दी हुई है जिनका परिकलन पहिले ही किया जा चुका है - (सारणी 221) । इनको दो दो के मुम्मा में बॉट दिया गया है। तीसरे स्तभ में पहली चार संस्थाएँ कमरा इन मुम्मों के जोडों से और अंतिम चार सस्याएँ इन युग्मो के जतरों से बनी है। इन सस्याओं को फिर दोन्दों के युग्मों में बांट दिया गया है। चीचे रतन में फिर वहीं किया दुहरायी गयी है। यानी प्रमम नार सस्याएँ कमदा तीसरे रतम में दिये हुए युग्मों के जोड़ों से और अन्य नार इनके जतरों से बनी है। इस क्रिया को अतिम बार पौचवें रतम में दुहराया गया है। इस स्तम की सस्यार पुरा है। इस स्तम की सस्यार पुरा है। इस क्ष्मा की ए परस्पर कियाएँ हैं जैसा कि 22.1 से 22.7 सस्यक्ष समीकरणों से प्रकट है। जिन प्रभावों के ये अनुमान हैं उन्हें छटे स्तम में दिया गया है। आपने यह नीट किया होगा कि उपचार में जिन जिन एक, दो, या तीन उपादानों के सुवकाक 2 है उनके सामने उन्हीं उपादानों के स्युक्त प्रभावों का अनुमान है रता है।

क्यों कि मुख्य प्रभावो और परस्पर-कियाओं की कुल सस्या 7 है और 1- परीक्षण के लिए प्रत्येक को खुटि-क्यों-माध्य के वर्ग मूल से विभाजित किया जायगा इसलिए बजाय अर्थिक प्रभाव के लिए 1 के मान का परिकलन करने के यह मालूम करना अधिक सराज अर्थों के पार करने के यह मालूम करना अधिक सारण अर्थों कि पार करने से साम का परिकलन करने के यह मालूम करना अधिक स्थापन के साम का प्रभाज करने ।

स्वातच्य सस्या 21 के लिए t—बटन का पाँच प्रतिशत बिंदु 208 है (देखिए सारणी सस्या 101) । इन सब प्रभावी के प्राक्कलनी का प्रसरण $\frac{\sigma^2}{8}$ है । पाँचमें स्तम में दी हुई सस्याजी का प्रसरण $2\sigma^2$ है । इसलिए यदि इस स्तम की कोई सस्या $208 \times \sqrt{2} ($ पुढि वर्ग-नाच्य) में अधिक हो तो वह अर्थपूर्ण है । (देखिए § १०.१) यहीं $208 \times \sqrt{2} ($ पुढि वर्ग-नाच्य) = 310

इस प्रकार हम देखते हैं कि V,S,M तथा SM अर्थपूण है। िकस्म V_1 से किस्स V_2 अधिक उपज देती हैं यहि उसके साथ किसी भी दोने की विश्व और खाद का प्रयोग किसा भाग । इसी प्रकार S_1 से S_2 अच्छी बोने की विश्व है और M_1 के M_2 अच्छी बाद है। परतु S_2 और M_2 का समुक्त प्रभाव जन दोनों के अलग-अलग प्रमानों के योग से भी अधिक है क्योंति SM का प्रापकलन चनास्पक है। इससे यह पता चलता है कि सर्वोत्तम उपचार $V_2S_2M_2$ है।

यह हम पहले ही कह चुके हैं कि मुख्य प्रभावां और परस्पर-क्रियाओं के वर्गों के योग उपचार वर्ग-योग के वरावर है। इस उदाहरण में हम इस कथन की जाँच कर सकते हैं। हमें देखना है कि (सारणी सख्या 223 के अनुसार)

$$\frac{(5)^2 + (15)^2 + (3)^2 + (11)^2 + (-1)^2 + (5)^2 + (1)^2}{2} = 3 प्रचार-वर्ग योग$$

भयवा 25+225+9+121+1+25+1 अपनार-वर्ग योग

भगवा $\frac{407}{2}$ = 203.5 = उपचार-वर्गे योग

यह उपचार वर्ग-योग का वही भान है जिसका परिकलन उपचार-योगी द्वारा करके हमने प्रसरण विश्लेषण सारणी में रक्षा था ।

अघ्याय २३

समाकुलन (Confounding)

\$ २३ १ असंपूर्ण-डलॉक अभिकल्पना की आवश्यकता

अभी तक हमने जितनी भी अभिकल्पनाओं का अध्ययन किया है उनमें जितने भी उपनार (treatments) ये उन सनको प्रत्येक स्वर्गेक में सामिल किया गया था। आपको यह रोगा कि रूजोंक नानों का उद्देश्य यह था कि एक्षी श्रव्यों को लाँद हो उनमें निर्माण नहीं से पित हो उनमें निर्माण नहीं हो अधिक में हो तो अध्या बहुत अधिक नहीं हो क्ष्यों में इस प्रकार की समायता (homogenetry) होता बहुत कठिन नहीं है। इसि सवधी प्रयोगों में पास के प्लांदा में अधिक अदर नहीं होता। परतु यदि वस वस या बारह नारह प्लाट एक एक क्लॉक में हो तो वो छोरों के प्लांदी में काफी अतर हो सकता है। यदि अतर अधिक हो तो ब्लॉक वनाना व्यर्थ हो जाय। इस कारण उपन्यारों की सवसा अधिक हो जाने पर हमें अन्य अधिकप्रवाशों की तलास करती पत्रती है।

इन अभिकल्पनाओं को हुम असपूर्ण-ब्लॉक अग्रिकल्पना (mcomplete block dengn) की समा देते हैं। इनमें ब्लॉक के स्वांटों की सक्या कुल उपचारों को स्वया से कम होती है। यदि प्रयोग-बहु-उपावानीय होतो हुम इस प्रकार के प्रयोग का स्वयानीय होतो हुम इस प्रकार के प्रयोग का स्वयानीय होतो हुम इस प्रकार के प्रयोग का स्वयानीय होतो हुम इस प्रकार के प्रयोग का अनुमान नहीं कमा सकते। इस द्वामा में हमें यह सोषना पड़ता है कि कोन ते मुख्य प्रभाव वा एस्पर-िजयाएँ सबसे कम महस्त एसती है। प्रयोग-अधिकल्पना इस प्रकार वनाय के श्री हम स्वयानीय कारी है कि इन महत्वसीन प्रभावों को छोवकर लग्य पत्र का साम के साम प्रवाश के साम प्रकार के प्रयोग कि स्वयानीय परिकल्पनाओं की हम जॉन कर रहाँ। यह देखा गया है कि अधिकतर उच्च-कम (higher order) की परस्पर-िजयाएँ महत्वपूर्ण नहीं होती और इन्हों का हमें बिल्यान करना पड़ता है। जब हम कियी प्रभाव का अनुमान नहीं लगा सकते और न यह पत्र का साम के हैं कि विचारण के इस उद्योग के काम नाम को मोग का परिसाग क्या है तो यह परिवाश कार-कार्य का स्वान के और हम कहते हैं कि यह प्रमाव कार-कार्य का समा है तो वह परिवाश कार-कार्य का स्वान हमें में से हम सहते हैं कि यह प्रमाव कार-कार्य के साथ समाकृत्व (confounded) है।

६ २३.२ परस्पर-किया का समाकुलन

जित बहु-उपावानीय प्रयोग का हुम पहुठे विवरण दे चुके हूँ उसमें विद यह पामा जाय कि एक ही क्लीक में बाट प्लॉट रसना उचित नहीं है तो कुळ उपचार सबयो को दो मागो में विभाजित नरे चार-चार प्लाटों ने प्लॉक वायों जा करते हैं। हमारें पिछले प्रयोग के हर एक फ्लॉक को दो भागों के तथा में विभाजित क्या जा उनता है। इस प्रकार प्राथमिक करोंक को अब हम क्लोक-मुम्म कह करते हैं। इस प्रकार प्राथमिक करोंक को अब हम क्लोक-मुम्म कह करते हैं। इस प्रकार प्राथमिक करोंक को अब हम क्लोक-मुम्म कह करते हैं। इस प्रकार प्राथमिक करोंक को अब हम क्लोक-मुम्म कह करते हैं। इस प्रकार प्रयोग के प्रवास को प्रवास के प्रवास को प्रवास की प्रवास कर की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास की प्रवास कर प्रवास है।

हम यह जानते हैं कि ध्लॉक्सुम के भाग b के उपचार सचयों के प्रभावों के योग में से भाग a के उपचार सचयों ने प्रभावों के योग को चटाने से VSM का प्रान्तकन होता है (समी० 2.2.9)। परतु क्योंकि a और b को पैदावारों में इन उपादागें के प्रभाव के भागित के निर्माल के प्रभाव की धार्मिल हैं, दसिल b की पैदावार में से a की पैदावार को घटाने से हमें $VSM+4(B_0-B_0)$ का अनुमान लगता है। यहाँ B_0 और B_0 हारा हम ध्लॉक b और a अप प्रभावों को भूचित कर पेंदे हैं। इस प्रभार हम देखते हैं कि जि उपादानों परस्पर विचा ध्लॉक प्रभावों के स्थाय समाञ्चाल है अनुसान मही लगाया जा सकता।

अब यह देखना है कि कही अन्य मुख्य प्रभाव अथवा डि-ज्यादातीय परस्पर क्रियाएँ भी तो क्लॉक प्रभातों के साथ समाकुलित नहीं है । इसके लिए हम एक मुख्य प्रभाव बीर एक डि-ज्यादानीय परस्पर क्रिया का प्रामक्लन करने की बेप्टा करेंगे ।

 $4V = (V_2S_1M_2 + V_2S_2M_1) - (V_1S_1M_1 + V_1S_2M_2)$

 $+ (V_2S_1M_1 + V_3S_2M_2) - (V_1S_1M_2 + V_1S_2M_1) ... (23 1)$ यह देवा जा सकता है कि इस परिकारन में हर एक रकोंक में दो रकारों जे पैरा-पार के योग में से अन्य दो 'थडोंटो की वैदाबार को घटाया जाता है। जत वर्षण त्रवेक सक्त्य में कठोंक प्रमाव B_2 या B_3 मी त्वियान है खापि इस प्रकार के योग और वियोग से ये कठोंक प्रमाव हैट जाते हैं और हमें मुख्य प्रमाव V का शुद्ध अनुमान प्राप्त हो जाता है। (देखो सभी०22 I)। इसी प्रकार आप देख सकते है कि अन्य मुख्य प्रभावों के भी शुद्ध अनुभान प्राप्त करना सभव है।

अब हम एक डि-उपादान परस्पर-किया का प्रावकलन करने की चेप्टा करेंगे।

$$VS = (V_2S_2M_1 + V_1S_1M_1) - (V_1S_2M_2 + V_2S_1M_2) + (V_2S_2M_2 + V_1S_1M_2) - (V_1S_2M_1 + V_2S_1M_1)(23 2)$$

+ (F252M2+F251M2) ····(E3 #) इसमें भी ब्लॉक प्रभाव जितनी बार जोडे जाते है उतनी ही बार घटा दिये जाते

है। इस प्रकार VS के प्राक्कलन से स्लॉक प्रमाद हट जाता है और हमें इस परस्पर किया का सुद्ध प्राक्कलन विना किसी समाकुलन (confounding) के पता बल जाता है (देखों समी० 22.4)।

८ २३.३ विश्लेपण

आइये, अब हम देखें कि इस प्रयोग-अभिकल्पना में विश्लेषण किस प्रकार किया जाय । इस विश्लेषण के विभिन्न चरण निक्कालितित हैं।

- (१) कुल ब्लॉको के लिए अतर-ब्लॉक वर्ग-योग का परिकलन।
- (२) जो मुख्य प्रभाव या परस्पर-कियाएँ समाजुलित नहीं हुई है उनके वर्गों के योग का परिकलन । यदि पहले समाजुल्क का विचार किसे बिना उपचार वर्गे-योग का परिकलन कर लिखा गया हो तो इसमें से समाजुलित परस्पर-त्रिया के वर्ग-योग को पटाने से भी हमें यही मान प्राप्त होगा।
- (३) बृटि वर्ग-योग को कुल वर्ग-योग में से अंतर-क्लॉक वर्ग-योग तथा उपचार वर्ग-योग के योग को घटा कर प्राप्त करना ।

निछले अध्याय के उदाहरण के लिए ये चरण नीचे दिये हुए हैं (देखिए सारणी सहया 22.1)

सारणी सस्या 23 1

VSM के समाकुलित होने पर ब्लॉक-योग

		विश्वासुगकत १	Stut at south	~44.4
ब्लॉक		I,	II.	Π_b
	3-1-7		5-10-8	
योग	+6+10			+7+15
<u> </u>	== 26	=30	=35	=36
ब्लॉक		\mathbf{m}_{b}	IV.	IV.
योग	4- 	s+5		l4+5 +5+8
વાય	=28	+7+II ==28	+4+8 =23	+5+° =22
	-20		1 23	

सारणी सस्या 23:2

VSM के समानुलित होने पर प्रसरण विश्लेषण

विचरण का उद्यास	स्वातच्य सस्या	वर्ग-योग	वर्ग-माच्य	अनुपात	5%स्तर पर अर्थपूर्ण मान
I		3	4	5	6
स्लोक युग्म	3	S2=42 75	M1=14 25		
VSM	1	S ₂ =0 50	M ₂ ==0 50	$\frac{M_e}{M_e} = \frac{0.50}{0.58} = 0.86$	1013
(NSM के (NSM के	3	$S_{a} = S_{b} - S_{1}$ $-S_{2} = 1.75$	M _€ =0 58		
कुल ब्लॉक	7	S _b ==45 00		$\frac{M_b}{M_{e^i}} = \frac{6.43}{1.19} = 5.40$	2 58
(1 Sधकोछोड कर) उपचार		S₂=203 00	M ₉ ==33 83	$\frac{M_3}{M_{e'}} = \frac{33.83}{191} = 28.43$	2 66
त्रुटि	18	$S_{t} = S - S_{\mathfrak{d}}$ $-S_{\mathfrak{d}} = 2) 50$	M,'==1 19		
मुख	31	S=269 50			

ज्ञार की सारणों में स्वीत्युक्त वर्ष-योग वही है जो सारची सख्या 22.2 में स्वीत क्षेत्रयोग पा स्वीति सारणी सख्या 22.1 में स्वात व्यान वही है जो सारणी सब्या 22.1 में स्वीत क्षेत्रयोग द्वारा 23 में स्वीत के उपचार वर्ष-योग वो सत्वात रहिता से निकाला जा तकता है। एक तो VSM को सवाकुल्तित न मान कर क्ये हुए दिस्तेण (देलों नारणी 22.2, 22.3) में प्राप्त उपचार वर्ष-योग में से VSM वर्ष-योग $\frac{1}{2}$ =0.50 की प्रकार :

203.50-0.50=203 00

दूसरे, जितने a ब्लॉक हैं—मानी \mathbf{I}_s , \mathbf{II}_a , \mathbf{III}_a और \mathbf{IV}_a उनमें केवल बार उपचारों के अंतरों के कारण हमें एक उपचार

वर्ग-मेरा प्राप्त हो सनता है जिसकी स्वातत्र्य सस्या 3 है। इसी प्रकार b क्लॉको प से हम अन्य उपवारो के अवरा से प्राप्त वर्ग योग का परिकलन कर सकते हैं जिसकी स्वातत्र्य सस्या भी 3 है। इन दोनों के योग से हमें क्लॉक के अतर का कुल उपवार वर्ग-योग प्राप्त होता है जिसकी स्वातत्र्य सस्या 6 है। सारणी 22 1 के अनुसार ≡ क्लॉको के 16 स्कीं⊐ की कुल पैदावार 112 सथा 4 क्लॉको के लिए उपवार वर्ग-योग

$$S_{aa} = [(16 \times 4) + (32 \times 8) + (24 \times 6) + (40 + 10)] - \frac{(112)^{3}}{16}$$

$$= 864 - 784$$

$$= 80$$

b स्लाको के 16 प्लाटो की कुल पैदाबार=116 समा b स्लाको के लिए उपचार वार्तिय S → ((2004 S) + (2004 S) + (2004 S) + (2004 S) + (2004 S)

वर्ग-कोग
$$S_{2}$$
, = $[(20 < 5) + (24 \times 6) + (24 \times 6) + (48 \times 12)] - \frac{(116)^2}{16}$
= $964 - 841$
= 123

इस प्रकार कुल उपचार वर्ग-पोग = 80+123 = 203

= 20

शास्तव में a टलोंको और b टलोंको के लिए अलग-अलग विश्लेषण किया जा सकता है। इसके द्वारा थोगा उपचार वर्ग योगो को लोड कर कुल उपचार वर्ग-योग, समा तृति वर्ग योगो को लोड कर कुल जुटि-वर्ग योग प्राप्त किया जा सकता है। टलोंक सम्बन्ध है। टलोंक सम्बन्ध है। टलोंक सम्बन्ध है। टलोंको के लिए हमें एक पद और जोडना चाहिए जो a टलोंकों के थीन के अंतर से स्वधित है।

a स्लॉको के लिए विश्लेषण

(1) ब्लॉक वर्ष योग
$$S_{1_a} = \frac{(26)^2 + (35)^2 + (28)^2 + (23)^4}{4} - \frac{(112)^2}{16}$$

(देखिए सारणी सस्या 23 I) $= \frac{676 + 1225 + 764 + 929}{4} - 784$
 $= 8035 - 784$
 $= 195$

(ii) कुल वर्ग योग Sa = [32+52+42+42+72+102+82+72 (देखिए सारणी सस्या 22 1) + 6-+8-+6-+4-+10-+12-+10-+8-]

b बलाको के लिए विदलेयण

(i) ब्लॉक बर्ग-बोग
$$S_{1b} \approx \frac{(30)^2 + (36)^2 + (28)^2 + (22)^2}{4} - \frac{(110)^2}{26}$$

(देविए सारणी सस्या 23.1)

$$= \frac{3464}{4} - 841$$

$$= 866 - 841$$

$$= 25$$

(ii) कुल वर्गे योग S₀ == [5²+6²+5²+4²+6²+8²+5²+5² (देखिए सारणी सन्या 22 I) +5°+7°+5°+14°+14°+15°+11°+8°]

इस सारणी (सारणी अपले पुष्ठ पर देखिए) सस्या 23.3 में स्लॉक-वर्ग योग तया कुल-वर्ग-गीम के लिए अतिम स्तम्भ में a और b ब्लाको में विभाजन से उत्पन्न पद 0 5 की जोड़ने से हमें पूर्व किछन सारणी प्राप्त होती है।

ब्लॉक बर्ग-गोग को दो प्रकार से विभाजित किया जा सकता है जैसा ऊपर की दो सारिवयों द्वारा स्पष्ट है। पहळी सारणी में विभाजन यह समक्ष कर किया जा सबता है कि ब्लॉक-युग्म तो ब्लॉक है और उसने वो भाग प्लॉट । इस प्रकार कुल ब्लॉक वर्ग-योग को अतर क्लॉक युग्म, बुटि तया उपचार वर्ग-योग में बाँटा जा सकता है। यह चमचार वर्ग-गोग VSM के कारण है। इस प्रकार के विमाजन से VSM के वर्ग-मेंग को भी जीवा जा सकता है, परतु इसके लिए बुटि बातर-ब्लॉन-मुग्म वर्ष-प्रोग से

साह्यिकी के सिद्धान्त और उपयोग

सारणी सत्या 23 3

		district books				
		क स्टाक		के ब्लाक		180
विवर्ण का उद्गम	स्वात्राज्य सहधा	वस योग	स्वातृश्य सस्या	बग योग	स्वातत्र्य संस्याः	बग् योग
Ξ	(2)	(3)	(4)	(s)	(9)	(2)
च्लोंक	~	S1e=19 5	٣	S19=250	٥	$S_0 - S_2 = S_{1a} + S_{1b}$ = 44 5
र्जमनार	3	S ₂₆ =800		S2b=1230	9	S2=S2+S26
बैंदि	٥	$S_{r_4} = S_a - S_{1a} - S_{2a}$ $= 4.5$	۵	Seb Sp-Sp-Sp	18	Se=Sea+Ses
শী	1.	S_=104 0	T.	S ₀ ≈1650	30	S-S=5+Sb

प्राप्त होती है। दूसरी सारणी में विभाजन अतर-a क्लॉक, अतर-b ब्लॉक तथा a और b ब्लॉको के माण्यों के अतर द्वारा किया गया है।

करर के जुल पृथ्वे से आपको यह गानुम हुआ होगा कि यवांप एक ही प्रमोग द्वारा समाकुलित परस्यर विधा का अक्कलन समय नहीं है, परतु कर्द बार विदे हुए प्रयोगों द्वारा यह समय है। इस सामाकुलित च रस्परिका के अवकलन की पूर्ट अप्रयोग प्रावक्त काने की तर्म कर अवकलन की पूर्ट अप्रयोग होगा होने हैं के प्रिक होगों है और हस पूर्ट की स्वारुप्य स्थ्या भी बहुत कर एवं जाती है। उत्पर हमने इस प्रकार की अधिकरूपका का वर्णन क्रिया है जिसमें केवल एक परस्यर निमा YSM अप्योक कर्णाक बुाम में बमाकुलित है। इसके अविधिक्त प्रेमी अधिकरणना भी की जा सकती है जिसमें समाकुलत सूर्ण न होकर केवल आधिक हो। ई रे दू अधिक समाकुलत (Partal confounding)

इस प्रकार की अधिकल्पना में भिन्न-भिन्न क्लॉक-युम्मों में भिन्न-भिन्न परस्पर किमानों को क्लॉक-प्रभावों से समाकुणिय किया जाता है। इस प्रकार यदि एक पर-रपर जिसा एक क्लॉक ग्रुम्म में क्लॉक-प्रभावों से समाकुरित है तो उसका प्रावक्रकन इसरे क्लॉक ग्रुम्मों हाए करावा जा मकता है। इस प्रकार की व्यक्तिकल्पना का एक उसाहरण नीचे दिवा हुआ है।

सारणी संख्या 23.4 माशिक समाकृष्टित अभिकत्यना-जपचारो का अनजन और क्लॉब-योग

समाकुलित परस्पर क्रिया	VS	M	ν	М	Þ	'S	J	MS.
क्लॉबा	Ĩ,	Ĭb	11,	II.	III.	III	IV,	IV,
(1)	(2)	(3)	(4)	(s)	(6)	(7)	(8)	(9)
	$V_1M_1S_1$	$V_2M_1S_1$	$V_2M_1S_1$	V ₁ M ₁ S ₁	$V_2M_1S_1$	$V_1 M_1 S_1$	$V_1M_2S_1$	$V_1M_1S_1$
	$V_2M_2S_1$	$V_1M_2S_1$	$V_1M_2S_1$	$V_1M_1S_2$	$V_1 M_2 S_2$	$V_1M_2S_1$	$V_1M_1S_2$	$V_2M_1S_1$
	$V_2M_1S_2$	$V_1M_1S_2$	$V_2M_1S_2$	$V_2 M_2 S_1$	$V_{I}M_{2}S_{I}$	$V_2M_1S_2$	$V_2M_2S_2$	$V_1 M_2 S_1$
	$V_1 M_3 S_2$	$V_2M_2S_2$	$V_1M_2S_2$	$V_2M_1S_1$	$V_1M_2S_2$	$V_{\mathfrak{g}}M_{\mathfrak{g}}S_{\mathfrak{g}}$	$V_2M_1S_1$	$V_{2}M_{2}S_{2}$
डलाक योग	26	30	36	35	26	30	21	24

६ २३.५ सास्यिकीय विश्लेपण

आदित समाकुलन की स्थिति में जिल साधारण नियम का पालन किया जाता है वह केवल यह है कि आधिक समाकुलित परस्पर-क्रियाओं का प्रावकलन उन व्लॉक-युम्में से समाया जाता है जिनमें वे समाकुलित नहीं है। एन प्रावकलनो से मर्प-योग उस्ती प्रकार परिल्लित किया जाता है जेवें अनसमाकुलित अधिकल्पनाओं में । यह स्थान में रचना होता है कि ये जनुमान क्य प्लॉटो पर आधारित है। क्लॉक कर्प-योग का परिकलन क्लॉक योगों के आधार पर साधारण तरीके है ही किया जाता है।

यदि हमने परस्पर-त्रियाओं के यौग का परिकलन—विना समाकुलन का स्पान एखें हुए ही सब क्लॉक-युग्मों के आचार पर कर किया हो तो इस परिकलित मान में से उन कलक-युग्मों का अतर घटन कर इसे ठीक किया जा सकता है जिनमें ये समाकुलित हैं। उत्तर के उदाहरण में यदि परस्पर-किया VM के योग का परिकलन करना है हो सह पुराने योग में म्लॉक Π_a के योग को जोड़ कर तथा Π_b के योग को घटा कर किया जा सकता है।

इस प्रकार

$$[VM]' = -4+36-35 = -3$$

 $(VS)' = 12+26-30 = 8$
 $[MS]' = 20+21-24 = 17$
 $[VSM]' = 4+26-30 = 0$

प्रसारण विश्लेषण में जब हर एक परस्पर-किया के शिए एक एक स्वावम-सस्या होगी बयीकि इस सदका प्रावक्त कर स्वावा आ सकता है। परस्पर-क्रियाओं के वर्ष-योग जगर दिये हुए योगों के वर्ष की 24 से बिमाजित करने से मिलते हैं स्पोक्त किया के स्वावाधिक करने से प्रत्येक 24 स्वादों की उपयो के योग और वियोग द्वारा परिकलित है। जिस जिस हजांक-पुग्म में ये समाकृतित हैं उनके आठ प्लॉटो का उपयोग इनके परिकल्त में मही किया गया है। मुख्य प्रमायों का वर्ग-योग वही रहता है जो पहले था। ब्लॉक कर मालूम कर लिया वाता है।

$$VM$$
 के कारण वर्ग योग = $\frac{3^2}{24}$ = 0 375
 VS के कारण वर्ग योग = $\frac{8^2}{24}$ = 2 667

$$MS$$
 के कारण वर्ष-मोग $=\frac{(17)^2}{24}=12\,042$
 VSM के कारण वर्ष-मोग $=\frac{0^2}{24}=0\,000$
 V के कारण वर्ष-मोग $=\frac{(5\times4)^2}{32}=12\,500$ (देखिए सारणी सहसा २२३)
 S के कारण वर्ष-मोग $=\frac{(15\times4)^2}{32}=112\,500$
 M के बारण वर्ष-मोग $=\frac{(11\times4)^2}{32}=60\,500$
 $\frac{1}{4}(26)^2+(30)^2+(36)+(35)^2+(26)^2+(30)^2+(21)^2+(24)^2]$

== 48 000 सारणी सख्या 23 5 माशिक-समाकृतित अभिकृत्यमा का प्रसर्च विवतेषण

विचरण का उद्गम	स्वातत्र्य सस्या	वर्ग-याग	वग-माध्य	अनुपात	ऽ%स्तर पर अनुपास का अर्थपूर्ण मान
(i)	(2)	_ (3)	(4)	(5)	(6)
- ब्लॉब	_ 7	48 000	6 8 5 7	5 575	2 62
v	1	12 500	12 500	10 163	4 45
M	1	60 500	60 500	49 187	4 45
S	1	112 500	112 500	91 464	4 45
मुस्य प्रभाव	3	185 500	61 833	50 271	3 20
VM	1	0 375	0 375	0 305	4 45
Vs	1	2 667	2 667	2 168	4 45
MS	7	12 042	12 042	9 790	4 45
VSM	1	0.000	0 000	0 000	4 45
परस्पर किया	4	15 084	3 771	3 000	2 96
<u> युटि</u>	17	20 916	1 230		
कु रु	31	269 500			

अध्याय २४

संतुलित असंपूर्ण ब्लॉक अभिकल्पना Balanced Incomplete Block Design

६२४१ परिभापा

पिठिन अध्याय में हमने बुठ अमपूर्ण ब्लॉब अमित्रस्यनाओं से परिचय प्राप्त निया चा जिनका प्रयोग बहु-प्यादानीय प्रयोगा में किया जाना है। इस अध्याय में हम एक अन्य प्रकार की अन्यूर्ण-क्लॉब अमित्रस्यना का अध्ययन करेंगे जिसको संसुर्णिक असंसुर्णि क्लॉक अमित्रस्यना बहा जाता है। इस अमित्रस्थना के बुछ नियम हैं जो नीचे दिये हुए है।

(1) हर एक क्लाक में प्लोटों की मख्या बराबर होती है। इस सख्या को हम

k से मूचित वरेंगे।

(2) हर एव उपचार वा जितने ब्लॉको में पुन प्रयोग किया जाम उनकी मध्या बराबर हानी है। इन पुन प्रयोग की नक्ष्या को हम 1 से सूचित करेंगे। एक ब्लॉक में एक उपचार का एक ही बार प्रयोग होता है।

(3) उपचारा में में यदि दो-दो ने गुम्म बनाये जायें तो हर एक गुम्म ने उपचार दिनी। न दिनी क्लॉह में अवदय साम-साय आते हैं। उन क्लॉहरे की सदया जिनमें दिनी विभीय गुम्म ने उपचार साथ-साय आते हैं प्रत्येन गुम्म ने लिए समान होती है। इस सत्या को हम À से भूषिन करेंगे।

हुल उपचारों ने सस्या को हम प्र से और बुळ ब्लॉना की सस्या को प्रे से सूचित करें।। इनके पहले कि हम इस प्रकार की अधिकस्पना का उदाहरण सहित विस्तेपण करें, इसको अधिक स्पष्ट करने के लिए एक-दो सरक उदाहरण नीचे दिये जाते हैं।

६ २४.२ उदाहरण

करर बिये हुए नियमों से, विशेषकर दीक्षरे नियम से, स्वप्ट है कि एक ब्लॉक में कम से कम दो प्लॉट अवस्य होने वाहिए। वादि कुछ उपचार पाँच हो जिन्हें $A_i E_i C_i D$ और E से सूचित किया जाय तो तीसरे नियम के अनुसार प्रत्येक उपचार-युग्म कम-से-बम एक स्टॉक में अवस्य होना चाहिए।

 यदि एक ब्लॉक में केवल दो प्लॉट हो तो अभिकल्पना में कम से बम दस प्लाट अवस्य होने चाहिए जिनमें (1) AB (2) AC (3) AD (4) AE (5) BC (6) BD (7) BE (8) CD (9) CE तथा (10) DE ये दस उपचार-युग्म होगे । या हो मकता है कि प्रत्येक समझ की दो या तीन बार दहराया गया हो। कुछ भी हो, पदि कुल उपवारी की सल्या पांच है और हर एक ब्लॉक में केवल दो फांट है तो हुन क्वाँको की सस्या (६)=10 अथवा दम का कोई गणज(multiple)होगी।

 उपर्यंक्त स्थिति एक सोमान्त स्थिति है क्योंकि दो से क्य प्लॉट किसी सतु-लित असपूर्ण अभिकल्पना में हो ही नहीं सकते। दूसरी सीमान्त स्थित वह होगी नव एक क्लॉक में प्लॉटो की सक्या & कुल उपचारो की सख्या v से केवल एक कम हो। k=v-1

क्यर के पाँची उपवारों में से चार चार एक-एक ब्लॉक में हो और तीना निषमो का पालन हो हो यह इसका एक उदाहरण होगा । इस स्थिति में कूल क्लॉको की मस्या b पांच या पांच का कोई गगज होगी । में चार चार के पांच समह निम्तलिखित है : (1) A B C D (2) A B C E (3) A B D E (4) A C D E (5) B C D E मयोकि प्रत्येक बलाँक में एक उपचार का प्रयोग नहीं होता और नयोगि प्रत्येक

उपचार का पुन प्रयोग समान सक्या में होना चाहिए, इसलिए यह स्वष्ट है कि इन पाँचो सचयो (combinations) का बराबर संस्था में होना सत्तित असपूर्ण बलॉक अभिकल्पना के लिए आवश्यक है।

उपर की अधिकाल्पका में

k=4 , r=4 , $\lambda=3$, $\nu=5$, b=5

आपको यह भ्रम हो सकता है कि यदि एक ब्लॉक में प्लॉटो की सक्या k है और कुल उपचारों की सख्या » है तो ब्लॉको की सख्या $b = (\H)$ होना चाहिए । ऊपर के बोनो उदाहरणो में ऐसा हुआ था, परतु वे दोनो सीमात स्थितियाँ थी। 🦲 ब्लॉको का होना उसी अवस्था में आवश्यक है जब k परिमाण का प्रत्येक सच्य किसी न किसी ब्लॉक में बदश्य हो। किन्तु अरापूर्ण ब्लॉक अमिकल्पना में अनेक सचय फिसी भी बलॉक में नही होते।

3 मान लीजिए, कुल उपचारो की सहया साल है और एक एन ब्लॉन में तीन दीन प्लॉट है । नीचे एक अभिकल्पमा दी जाती है । यह देखना है कि यह एक सतुलित बसपूर्णे अभिकल्पना है या नहीं।

ABD, ACE, CDG, AGF, BCF, BEG, DEF

- (1) बयोंकि प्रत्येक ब्लॉक में प्लॉटो की सस्यातीन है इसलिए पहिले नियम का पालन हो रहा है।
- (2) हर एक उपचार का पुन प्रयोग तीन तीन दार हो रहा है इसिक्ए दूसरे नियम का पालन हो रहा है।
- (3) दो दो के जो इक्कीस समृह इन सात उपचारों से बनाये जा सकते हैं वे सब विसी न किसी ब्लॉक में बवश्य पाये जाते हैं और एक उपचार-युग्म एक से अधिक ब्लॉकों में भी नहीं पाया जाता । आप यह देख सकते हैं कि किन्ही भी दो ब्लॉकों में दो उपचार एक-से नहीं हैं । इस प्रकार तीसरे नियम का भी पालन हो रहा है। इसिंध्य परिमापा के अनुसार यह अधिवस्पना एक समुख्ति असपूर्ण ब्लॉक अभिकस्पना है।

इस अभिकल्पना में ब्लॉको की सस्या केवल 7 है, न कि (ै)=35 ।

६ २४.३ संतुलित असपूर्ण ब्लॉक अभिकल्पना के प्राचलों के कुछ संबंध

किसी भी सतुष्ठित असपूर्ण-अभिकरपना को b, k, r, v और λ द्वारा सूचित किया जा सकता है जो इसके प्राचळ है। आप इन सकेतो से पहले से ही परिचित है।

क्यों कि कुल क्लॉकों की सक्या b है और प्रश्येक क्लॉक में k प्लॉट है इसलिए कुल प्लॉटों की सक्या bk है।

क्यों कि कुल उपचारों की सक्या ν है और हर एक उपचार का ν कोंटों में पुन. प्रयोग किया गया है इस कारण कुल प्लोंटों की सक्या को νr द्वारा भी सूचित किया जा सकता है।

$$bk = vr \qquad (A)$$

इसके अतिरिक्त जिन ब्लॉको में कोई एक विशेष उपचार (मया A) मौजूद ही उनकी सस्या है r, और इस प्रकार के प्रत्येक क्लॉक में k-1 ऐसे प्लॉट है जिनमें यह दिवार उपचार मौजूद नहीं उनकी दिवार उपचार मौजूद नहीं उनकी सस्या होगी r(k-1)—परतु यही वे ब्लॉक है जिनमें इस उपचार दिवार Aने साथ काम उपचार है के पूर्ण पायों में सकते हैं। क्लॉकि कुल $(\nu-1)$ अन्य उपचार है और उनमार से मौजूद ने से साथ A के A उपचार सूमा बनते हैं, इसलिए इन्हीं

ब्लॉको के उन फ्लॉटो की सख्या जिनमें यह विदेश उपचार नहीं है λ $(\nu-1)$ भी होती।

श्राः
$$\lambda(\nu-1)=r(k-1)$$

जमवा $\lambda=\frac{r(k-1)}{(\nu-1)}$ (B)

देशिल्ए समुनित असपूर्ण क्लॉक अधिकल्पना के लिए $\frac{\ell(k-1)}{\nu-1}$ पूर्ण सर्था (integral number) होनी चाहिए। यदि हम देखें कि कोई अधिकल्पना उपयुक्त दोनों गर्वो A और B को पूरा करते। है तो हम समस सकते हैं कि बह सदुवित असपूर्ण क्वोंके अधिकल्पना है।

९ २४.४ याद्रच्छिकीकरण

िमसी प्रयोग के लिए उपचारों के समयों को यादुष्टिकीकरण द्वारा विभिन्न क्वोंकों में बितरित करना और एक समय के उपचारों की क्वोंक के विभिन्न प्लांडों में पार्ष्टिकनीकरण द्वारा वितरित करना आवन्यक है।

§ २४·५ खेती से संबंधित एक संतुलित-असपूर्ण व्लॉक अभिकल्पना

भाष्य, अब हम देखें कि एक सतुष्ठित असपूर्ण क्लॉक अभिकल्पना का विस्तेपण जिन प्रकार निया जाता है। तूसरी अभिकल्पनाओं की ऑति इसको भी ज्वाहरण द्वारा समक्षाया जायगा।

🞙 २४.५.१ विश्लेषण के लिए प्रतिरूप, प्रतिरूप के प्राचलों का प्राक्कलन

मह देखने के लिए कि जनकी पैदाबारों में कुछ बिदोष अंतर है अभवा नहीं, पाँच प्रकार के मैहूँ के बीजो पर प्रयोग किया जा रहा है। यदि ब्लॉक i में किस्स j के मेंहूँ की पैदाबार की γ_{ij} से सूचित किया जाय तो प्रतिस्प के अनुसार

$$E(\gamma_{ij}) = b_i + t_i$$
 (24.1)
최단 $\sum_{j=1}^{E} t_{j} = 0$ (24.2)

यहीं b, द्वारा a के काँन के प्रभाव और t, द्वारा f विकास के प्रभाव की मूचित किया जा रहा है a, जी किस्स के प्रभाव t, से हमारा तात्पर्य f वो किस्स के मेहें की पैदावार तथा सब किस्सों को बौसत पैदावार के अत्वर के प्रत्याधित मान से हैं। इसी कारण हमें समीकरण (24.2) प्राप्त होता है। मांव की जिए अभिकत्यना में पीच कर्गोंक है जिनमें निम्मिलियित उपचार समृह हैं

(1] ABCD (2) ABCE (3) ABDE (4) ACDE (5) BCDE
यदि: -वें स्लॉन की कुल पैदावार को Ⅱ, से मूचित किया जाय ती

$$E(B_1) = 4b_1 + t_A + t_B + t_C + t_B$$

$$E(B_2) = 4b_2 + t_A + t_B + t_C + t_B$$

$$E(B_3) = 4b_3 + t_A + t_B + t_D + t_B$$

$$E(B_4) = 4b_4 + t_A + t_C + t_D + t_B$$

$$E(B_4) = 4b_4 + t_B + t_C + t_D + t_B$$

$$E(B_4) = 4b_5 + t_B + t_C + t_D + t_B$$

यहाँ 4=k प्रत्येक ब्लॉक के प्लॉटो की सक्या है।

इसके अतिरिक्त यदि T, द्वारा उन कांट्रो की पैदावार के योग की सूचित किया जाय जिससे J-की किस्स बोसी गयी है तो

$$E(T_A) = 4t_A + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

$$E(T_B) = 4t_B + b_3 + b_3 + b_4 + b_5$$

$$E(T_C) = 4t_C + b_1 + b_2 + b_4 + b_5$$

$$E(T_C) = 4t_C + b_1 + b_2 + b_4 + b_5$$

$$E(T_E) = 4t_F + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

$$E(T_B) = 4t_F + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$
(D)

यहां 4=1 = प्रत्येक किस्म के पुन प्रयोग की सख्या है।

$$\begin{array}{l} \therefore \ E\left[T_{A} - \frac{B_{1} + B_{2} + B_{3} + B_{4}}{4}\right] \\ = \ 4 \ t_{A} + b_{1} + b_{2} + b_{3} + b_{4} - \frac{4 \left(b_{1} + b_{3} + b_{4} + b_{4} + b_{4} + b_{4} + 3 \sum\limits_{j=A}^{E} t_{j}\right)}{4} \\ = \frac{15}{4} \ t_{A} - \frac{3}{4} \sum\limits_{l=A}^{E} t_{l} \\ \text{परg क्योंकि } \sum\limits_{k=1}^{E} t_{j} = 0 \ \text{इसिलिए} \end{array}$$

$$E\left[T_{A} - \frac{B_{1} + B_{2} + B_{3} + B_{4}}{4}\right] = \frac{15}{4} t_{A}$$

इसिलए यदि $T_A - \frac{B_1 + B_2 + B_3 + B_4}{4}$ को Q_A से सूचित किया जाम ती

 t_A का प्राक्कलक $\hat{t}_A = \frac{4}{15} \, Q_A \, \hat{\xi}$ ।

एत उदाहरण की अधिकल्पना सें

$$\therefore \hat{i}_A = \frac{k}{2n} Q_A$$

इसी प्रकार
$$i_{i} = \frac{k}{k_{i}} Q_{i}$$

$$j=A,B,C,D,E.....(E)$$

जहाँ $Q_j = T_j - ($ उन बलॉको की औमत पैदाबार जिनमे j-बी किस्स नीयी गयी है $\}$ ।

यह अधिक राधारण मूत्र है और इस प्रकार की किसी भी अधिकरूपना में इसका उपयोग हो शक्ता है ।

Q, को समजित ज्याचार योग (adjusted treatment total) कहा जाता है क्योंकि इसमें क्लॉका का प्रभाव हटा दिया जाता है ।

१ २४.५.२ परिकल्पना परीक्षण

इस \hat{t}_j के प्रसरण को हम $\frac{k}{\lambda \nu}$ σ^2 से सूचित करेंगे । क्योंकि \hat{t}_j और \hat{t}_j स्वतन है स्वास्तिष्ट

$$V\begin{pmatrix} \hat{t}_{1} - \hat{t}_{1} \end{pmatrix} = \frac{2k}{\lambda \nu} \sigma^{2}$$
 (24.3)

हम t-परीक्षण द्वारा t, बीर t,, के अंतर से सबधित परिकल्पाओं को जॉव कर सक्ते हैं। परतु इसके लिए उ³ के बनुमान का बात होना आवश्यक है। इसके जिए प्रसरण विस्त्रेषण सारणी की सहायता लेनी पक्ष्ती है।

सारणी संस्या 24.1

संतुत्तित असंतूर्णं ब्लॉक अभिक्ल्पना के लिए प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण का उद्गम	स्वानच्य मस्या	वर्ग-योग
(1)	(2)	(3)
उपचारा का उपका करके व्लॉक	p-z	$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{b} B_i^2 - \frac{G^2}{bk}$
ब्लाको का प्रभाव हटाकर उपकार	v—1	$= \frac{\sum\limits_{i=A}^{g} \hat{t}_{i} Q_{i}}{\lambda \nu} = \frac{k}{\lambda \nu} \sum\limits_{j=A}^{g} Q_{j}^{2}$
সুহি	(bk-1)-[(b-1)-(v-1)] = bk-b-v+1	
कुल	bk 1	$\sum_{i=1}^{b} \sum_{j=A}^{E} \gamma^{2} i j - \frac{G^{2}}{bk}$

त्रृटि वर्ग-योग को कुल वर्ग-योग में से अन्य दो वर्ग-योगो को घटाकर निकाला जाता

है। इस मारणी में $G=\sum\limits_{l=1}^{b}\sum\limits_{j=A}^{E}\gamma^{2}_{,l}$ सृद्धि वर्ग-योग में उसही स्वातस्य मरमा $bk-b-\nu\pm 1$ का माम देने से हमें σ^{a} का अनुमान होना है। इसी अनुमान क्षापिकरणनाओं को जांच में प्रयोग होना है।

§ २४.५-३ आंकड़े

ाइए, अब फिर अपना ध्यान उदाहरण पर लगाया जान ।

सारणी संख्या 242 प्रयोग का फल

1	A	B	1C	D	1	
ब्लॉ⊁ ा	1	3	zo	12	6 B ₁ =-31	
,	A	B	C	E		
ब्लॉक 2		4	9	12	4B ₂ =29	
	A	В	D	E	-	
ब्लॉक 3	Ĺ	7	12	5	$6B_3 = 30$	
	A	C	\overline{D}	E		
হলাঁক 4		6	9)	7	5,B4=27	
	В	C	D	E	[[
बलॉक ८	1	17	11	TO	o'B.=47	

६ २४.५.४ विश्लेषण

- - 9 25

$$\begin{aligned} Q_A &= 3+4+7+6 & -\frac{31+29+30+27}{4} \\ &= -925 \\ Q_3 &= 10+9+12+17 - \frac{31+29+30+47}{4} \\ &= 1375 \\ Q_C &= 12+12+9+11 - \frac{31+29+27+47}{4} \\ &= 10.50 \\ Q_D &= 6+5+7+10 - \frac{31+30+27+47}{4} \\ &= -575 \\ Q_Z &= 4+6+5+9 - \frac{29+30+27+47}{4} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=4}^{E} y_{ij}^2 = 1582$$

$$\sum_{i=1}^{5} B_i^2 = 5640$$

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{5} B_i^3 = 1410$$

$$G^2 = \int_{1}^{5} \sum_{j=1}^{E} y_{jj} \int_{j=4}^{2} = 26869 \frac{G^2}{5 \times 4} = 1344.8$$

$$\sum_{j=1}^{E} Q_{j}^{2} = 4179475 \qquad \sum_{j=1}^{E} Q_{j}^{2} \hat{l}_{j} = 45 \sum_{j=1}^{E} Q_{j}^{2} = 11145$$

सारणी संख्या 243

THE PERSON NAMED IN

	74	सरण विश्लव	ग सारणा		
विचरण का उद्गम	स्वातच्य संस्था	वग-योग	वर्ग-माध्य	अनु- पात	5% स्तर पर अर्थ-पूर्ण मान
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
उपचारों की उपेक्षा करके क्लॉक	4	65 20	16 30		
ब्लॉक प्रभाव हटाकर उपचार	4	111 45	27 86	5 07	3 36
त्रुटि	11	60 55	05 50		
कुल	19	237 20			

अध्याय २५

सहकारी चर (Concomitant Variable) का उपयोग और सह-प्रसरण विश्लेषण (Analysis of Covatiance)

५ २५.१ प्रयोग को अधिक दक्ष बनाने का प्रयत्न

सुटि को कम करने का एक और उपाय है। मान जीजिए, आप किसी विरोध क्षमण (characteristic) у में सिक्क्यनी रखते हैं। यदि अवा में पू को अधिरिक्त एक क्षमण करूप प्रचानी प्रेसण किमें आते हैं। यदि अवा पू के सिक्स क्यामा एक-पाठ सबप (Incar relation) हो तो पू के विक्षम में से अके मगत की हाज्या जा सकता है और इस प्रकार पूर्व करूर उपचार के ममाव को अधिक दशता के साथ प्रान्ककित निया जा राकता है। यह सभव है कि यह सक्षय अस्य मगत को हो कि उसके आधार पर क्यांक कनाना बहुत करिंग हो। इसकिए उसके प्रमान को क्यांक निर्माण द्वारा नही बांक किसी और ही तरकीय से हटाया जाता है।

१ २५२ समाश्रमण प्रतिरूप

पहले x और y के बीच एक समास्त्रवण देखा (regression line) का बनुमान स्माया जा सकता है। हम इस स्रीधमरणा को लेकर चलते हैं कि इस रेखा से yके विचलनों का चलन प्रशासाय है। इस प्रशासन्य बटन के प्रश्रम को ही हम चृटिन्यमं मान्य कहेंगे। यदि । — वें ब्लॉक में १ — वें उपचार पानेवाले प्लॉट के लिए १ छक्षण का मान १० तया ॥ रूसण का मान ३० हो तो इस प्रतिकृप के बनसार

$$y_{ij} = \mu + b_i + t_j + \beta (x_{ij} - \vec{x}) + \epsilon_{ij}$$

 $i = 1, 2, b$
 $j = 1, 2, v$ (25 1)

जहाँ µ≔Y_{II} के प्रत्याशित मानो का माध्य पिछले विश्लेषणो की भौति हम यह अधिधारणा लेकर चल सकते हैं कि

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 0 \tag{25.2}$$

सथा

$$\sum_{i=1}^{b} b_i = 0 \tag{25.3}$$

१ २५३ उपचारो के अभाव समान होने की परिकल्पना के अंतर्गत समाक्षयण प्रतिरूप के प्राचली का प्राक्कलन

यदि हमें इस निराकरणीय परिकल्पना की जांच करनी है कि सब उपचारी के प्रभाव समाग है तो इसके अनुसार

 $l_{j}=0$, j=1,2, ν इस परिकल्पना के अतगत समीकरण (251) बदक कर निम्निसिस्त हो जायना

$$Y_{ij} = \mu + b_i + \beta(x_{ij} - \bar{x}) + \in I_j$$
 (25.4)
हम नीचे निम्नलिखित सकेती का उपयोग करेंगे

$$Y_i = \sum_{i=1}^{r} Y_{ij} , \quad X_i = \sum_{j=1}^{r} x_{ij}$$

$$Y_j = \sum_{l=1}^{b} y_{lj} , \quad X_j = \sum_{l=1}^{b} x_{lj}$$

$$Y = \sum_{l=1}^{b} Y_i = \sum_{j=1}^{r} Y_{j-1} \sum_{l=1}^{b} \sum_{j=1}^{r} Y_{y} , \quad \overline{y} = \frac{V}{bv}$$

$$X = \sum_{l=1}^{b} X_{l} = \sum_{l=1}^{v} X_{l} = \sum_{l=1}^{b} \sum_{l=1}^{v} x_{ij}$$
, $\hat{x} = \frac{X}{bv}$

हमें μ , b_i और β का प्रावकलन करना है जहाँ i=x, 2, b। यदि दनके प्रावकलको को कनस $\hat{\mu}$, \hat{b} , तथा $\hat{\beta}$ से सूचित किया जाय तो इनके लिए हमें निम्न लिखित समीकरण प्राप्त होते हैं ।

(i)
$$bv$$
 $\hat{\mu} = Y$ \Longrightarrow ताब y —प्रेक्षणो का योग अथवा $\hat{\mu} = \frac{Y}{bv} = y$ (25.5)

(a)
$$\nu \left(\hat{\mu} + \hat{b}_i \right) + \hat{\beta} \left[X_i - \frac{X}{b} \right] =: Y_i$$

= $: -\vec{a}$ onis \hat{a} $\nu - \hat{\lambda}$ and α and α

= :—य ब्लाक के y—प्रक्षणा का या

$$\hat{b}_{i} = \frac{\mathbf{x}}{\nu} \left(Y_{i} - \frac{Y}{b} \right) - \frac{\hat{\beta}}{\nu} \left[X_{i} - \frac{X}{b} \right]$$

$$i = \mathbf{x}, \, \mathbf{z}, \quad b$$
(25.6)

(3)
$$\sum_{i=1}^{b} \hat{b}_{i} \left[X_{i} - \frac{X_{i}}{b} \right] + \hat{b}_{i} \left[\sum_{j=1}^{b} \sum_{j=1}^{r} (x_{ij} - \overline{x})^{2} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{b} \sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \overline{y}) (x_{ij} - \overline{x})$$

अथवा

$$\begin{split} \hat{\beta} &= \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{Z} (y_{ij} - \overline{y}) (x_{ij} - \overline{x}) - \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{b} (Y_{i} - \frac{Y}{b}) (X_{i} - \frac{X}{b}) \\ & \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{L} (x_{ij} - \overline{x})^{2} - \frac{\tau}{v} \sum_{j=1}^{b} (X_{i} - \frac{X}{b})^{2} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{c} y_{ij} x_{ij} - \frac{X}{b} - \frac{\tau}{b} - \frac{\tau}{v} \left[\sum_{j=1}^{b} Y_{i} X_{i} - \frac{Y}{b} - \frac{X}{b} \right] \\ & \left[\sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{c} x_{ij} - \frac{X}{k^{2}} - \frac{\tau}{k^{2}} \right] - \frac{\tau}{v} \left[\sum_{j=1}^{b} X_{i}^{2} - \frac{X}{k^{2}} \right] \end{aligned}$$
(257)

§ २५ ४ बिना परिकल्पना के समाध्यमण प्रतिरूप के प्राचलों का प्राक्कलन ये प्राक्कलक तो हुमें निराकरणीय परिकल्पना के बतर्गत प्राप्त हुए। यदि इस परिकल्पना के विका समीकरण (25 x) के आधार पर हम μ, t_p h, sh और β का प्राक्तरुत करें और इतको अभग्न $\check{\mu}^{\mu}_{j}$ \check{b}_{i} तथा $\check{\beta}$ से सूचित करें तो इतके लिए हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं।

(र)
$$b \ \nu \widetilde{\mu} \ Y$$
 अथवा $\widetilde{\mu} = \frac{Y}{b \nu}$ (25 8)

$$r(\tilde{u} + \tilde{b}_i) + \tilde{b}\left(X_i - \frac{X}{b}\right) = y_1$$

अयवा
$$\vec{b}_i + \frac{\ddot{\beta}}{v} \left(X_i - \frac{X}{b} \right) = \frac{1}{v} \left(Y_i - \frac{Y}{b} \right)$$
 (25.9)

$$b\left(\widetilde{\mu} + \widetilde{t}_{I}\right) + \widetilde{\beta}\left(X_{I} - \frac{X}{\nu}\right) = Y_{I}$$

$$\text{and at } \widetilde{t}_{I} \vdash \frac{\widetilde{\beta}}{\nu}\left(X_{I} - \frac{X}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu}\left(Y_{I} - \frac{Y}{\nu}\right) \quad (25.10)$$

$$(\P) \stackrel{\circ}{\Sigma} \stackrel{\circ}{b} \left(X_{i} - \frac{X_{i}}{b} \right) + \stackrel{\circ}{\Sigma} \stackrel{\circ}{b} \left(X_{i} - \frac{X_{i}}{b} \right) + \stackrel{\circ}{b} \stackrel{\circ}{\Sigma} \stackrel{\circ}{\Sigma} \left(X_{i} - \frac{X_{i}}{a} \right) + \stackrel{\circ}{b} \stackrel{\circ}{\Sigma} \stackrel{\circ}{\Sigma} \stackrel{\circ}{\Sigma} \left(X_{i} - \frac{X_{i}}{a} \right)^{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{v} (Y_{ij} - \widehat{y}) (x_{ij} - \widetilde{x})$$

$$\text{Special} \ \vec{\beta} \left\{ \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{p} (X_{ij} - \vec{X})^{2} - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{p} (X_{j} - \frac{\vec{X}}{\nu})^{2} - \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{b} (X_{i} - \frac{\vec{X}}{b})^{2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{\nu} (Y_{ij} - \widehat{y})^{2} (x_{ij} - \widehat{x}) - \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{\nu} (X_{j} - \frac{X}{\nu}) (Y_{j} - \frac{Y}{\nu})$$

$$-\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{b} \left(Y_{i} - \frac{Y}{b}\right) \left(X_{i} - \frac{X}{b}\right)$$

$$\text{even} \ \tilde{\beta} \left[\left\{ \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{t'} X_j^2 - \frac{X^2}{b\nu} \right\} - \frac{1}{b} \left\{ \sum_{i=1}^{v} X_i^2 - \frac{X^2}{\nu} \right\} - \frac{1}{\nu} \left\{ \sum_{i=1}^b X_i^2 - \frac{X^2}{b} \right\} \right]$$

$$= \left[\left\{ \sum_{i=1}^{b} \sum_{l=1}^{v} \gamma_{il} x_{il} - \frac{Y}{bv} \right\} - \frac{1}{b} \left\{ \sum_{l=1}^{v} Y_{il} X_{j} - \frac{Y}{v} \frac{X}{v} \right\} \right]$$

$$-\frac{1}{p}\left\{\sum_{i=1}^{b}X_{i}Y_{i}-\frac{Y}{b}\right\}\right] \qquad (25 \text{ II})$$

दर परिकल्नो के लिए हम एक अवस्थ-वहनवरण वास्थी को बहायता ले सकते हैं जोपूरू ३५२ वर बोहुई है। जिस प्रकार चरका x प्रवस्थ $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x}_j)^j होता है <math display="block">\text{ उसी प्रकार } \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x}_j) (y_j - \overline{y}_j) को <math>x$ और y का वह प्रवस्थ कहते हैं।

यदि X और Y बाद्धिक चर हो तो X और Y का सहप्रसरण $=E\left(X-m_{2}\right)\left(Y-m_{2}\right)$

जहाँ m_1 और m_2 कमदा X और Y के प्रत्याक्षित मान है।

मह आसानी से देखा जा सकता है कि

$$\hat{\beta} = \frac{S_{zz} - B_{yz}}{S_{zz} - B_{zz}} = \frac{T_{zz} + E_{yz}}{T_{ez} + E_{zz}}$$

$$\tilde{\beta} = \frac{S_{yz} - B_{zz} - T_{yz}}{S_{zz} - B_{zz}} = \frac{E_{zz}}{E}$$

§ २५ ५ उपचार वर्ग-योग

यदि हम प्रतिवर्ध प्रेशणों में समीकरण (25 1) के प्रतिरूप का भासजन (fitting) करें दो जुड़ि-यमें योग निम्नक्षिक्ति होगा

$$\begin{split} R_o^2 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left[\gamma_{ij} - \tilde{\mu}_i - \tilde{t}_j - \tilde{\mu} \left(x_{ij} - \frac{X}{by} \right) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left[\left\{ \left(Y_{ij} - \frac{Y}{by} \right) - \frac{1}{y} \left(Y_i - \frac{Y}{b} \right) \right. \right] \end{split}$$

सारणी सच्या 251 प्रमन्ध-महत्रमस्य सारणी

प्रतरण-सहप्रसर्थ सारणा	×	(8)	$B_{xz} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{b} X_i^2 - X_i^2$	$T_{\mathrm{sa}} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{\nu} X_i^3 - \frac{X^2}{b\nu}$	H _{era}	$S_{x_3} = \sum_{j=1}^b \sum_{j=1}^y x_{ij} - \frac{X_j^2}{b\nu}$		
	XX	(4)	$B_{po} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{b} X_i - \frac{Y}{b\nu} \frac{X}{i}$	$T_{yy} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{p} \gamma_j X = \frac{Y}{bp}$	Eyes	$S_{n} = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{b} \gamma_{ij}^{a} - \frac{Y^{a}}{b^{\nu}} S_{n} = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_{ij} x_{ij} - \frac{Y}{b^{\nu}} - \frac{X}{b^{\nu}}$		
	Y^{z}	(3)	$B_{\nu p} \!=\! \frac{1}{\nu} \frac{b}{i-1} \sum_{j=1}^{p} \! \gamma_{j}^{2} \! - \! \frac{Y^{2}}{b \nu} \!$	$T_{\nu \nu} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{\nu} p_j^2 - \frac{Y^2}{b \nu}$	E.	$S_{pp} = \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=1}^{9} \gamma_{ij}^{3} - \frac{Y^{2}}{b_{F}}$		
	स्वातत्र्य सस्या	(2)	Į	1-1	(b-1)(p-1) E _{yy}	<i>t</i> − 1		
	विचलन मा		क्लेंक	उपचार	₽,	IS IS		

$$-\frac{1}{b}\left(Y_{j}-\frac{Y_{i}}{v}\right)-\beta\left\{\left(x^{j}-\frac{X}{bv}\right)-\frac{1}{v}\left(X_{i}-\frac{X}{b}\right)\right.\\ \left.-\frac{1}{b}\left(X_{j}-\frac{X}{v}\right)\right\}\right\}$$

(बेंखिए समोकरण (क), (ख), (ग) और (घ))

$$\therefore R_{b}^{2} = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{p} \left[\left(y_{ij} - \frac{Y_{i}}{v} - \frac{Y_{j}}{b} + \frac{Y_{i}}{bv} \right)^{2} - 5\tilde{\beta} \left(y'_{ij} - \frac{Y_{i}}{v} - \frac{Y_{i}}{v} - \frac{Y_{i}}{v} \right) + \frac{Y_{i}}{v} + \frac{Y_{i}}{v} \right]$$

$$\left(x_{ij} - \frac{X_i}{\nu} - \frac{X_j}{b} + \frac{X}{b\nu}\right) + \tilde{\beta}^{g}\left(x_{ij} - \frac{X_i}{\nu} - \frac{X_j}{b} + \frac{X}{b\nu}\right)^{2}\right]$$

 $=E_{yy}-\frac{E_{yz}}{E_{zz}}E_{yy}+\left(\frac{E_{yz}}{E_{zz}}\right)^2E_{zz}=E_{yy}-\frac{E_{yz}^2}{E_{zz}}-E_{yy}-\widetilde{p}E_{yz}.$ (25.12) समी प्रकार समीकरण (25.4) के प्रतिकृष के बास्त्रजन करने पर बुटि निम्निलंबित

$$R_1^2 = E_{yy} + T_{yy} - \frac{(E_{yx} + T_{yy})^a}{(E_{xx} + T_{xy})}$$
(25.13)

 $=:E_{yy}+T_{yy}-\hat{\beta}(E_{yz}+T_{yz})$ इन बोनो नुटियो का अंतर हमें उपचार वर्ध-योग देता है ।** स्पोकि उपचारो

के प्रभाव यदि बास्तव में समान होते तो R_g^g और R_g^q के प्रत्यावित यान समान ही होते । इनका शतर केवल उपचारों के वर्ष-बोग के R_g^q में खामिल हो जाने के कारण हैं। इस तरह

जगगार वर्ग-मोग =
$$R_x^a - R_x^a$$

= $\{E_{xx} + T_{xy} - \hat{\beta}(E_{yx} + T_{yx})\} - \{E_{xy} - \hat{\beta}E_{yx}\}$
= $T_{yy} - \hat{\beta}(E_{yx} + T_{yx}) + \hat{\beta}E_{yx}$

होगी

^{**}उपचार वर्ग-गोग प्राप्त करने की यह विधि सामारण (gonctal) है। पिछने प्रमोगो ने विक्लेषण में ची उपचार वर्ग-गोग को प्रश्न विधि वे प्राप्त किया पा करना पा परतु नहीं थी हुई निधि विधिकत होने के कारण हट सामारण निधि का नर्पण पिछने अध्यागों में नहीं किया गया था।

२५ ६ परिकल्पनाओं के परीक्षण

इसिलए यदि हम इस निरान रणीय परिकल्पना की परीक्षा करना चाहते हैं कि सब उपचारों के प्रभाव समान है तो हमें उपचार-वर्ष माध्य और शृद्धिमाँ माध्य के अनुपात का कलन करना चाहिए। यदि यह अनुपात $F_{r-100r-9-3}$ बटन के एक पूर्व निश्चित प्रतिवात बिंदु से अधिक हो तो हम निराकरणीय परिकल्पना को अव्योकार कर वेंगे।

यदि परिकल्पना अस्वीकृत होती है तो हमारी पेप्टा यह जानने की होती है कि कौन-कौन से उपचारों के प्रभावों के अतर अर्थ-पूर्ण हैं 1 उपचार प्रभाव 1 और 1 के अतर का प्राक्कलन निम्नलिखित हैं 1

$$\hat{t}_j - \hat{t}_k = \frac{1}{k} [(Y_j - Y_k) - \hat{\beta}(X_j - X_k)]$$
(25.15)

इस प्राक्कलक का प्रसरण निम्नलिखित है।

$$\frac{2\sigma^2}{b} + \frac{\sigma^2}{b} \cdot \frac{(X_j - X_k)^2}{E_{ext}}$$
(25.16)

इस प्रकार प्रत्येक उपचार युग्म के अंतर के प्राक्कलन का प्रसरण श्रिप्त होता है। आइए, अब जो भी कुछ गणित हमने सहप्रसरण के विश्लेषण के सबध में सीखा है उसका उपयोग एक उदाहरण में करफे उत्तसे अधिक परिचित हो जामें।

§ २५ ७ उदाहरण

तीन प्रकार की लावें है। इनका प्रभाव नेहूँ की उपन पर क्या है यह जानने के किए एक यानुष्किकीष्टत क्योंक अभिकल्पना का उपयोग किया गया। इस प्रयोग में कुछ पीन क्योंक थे। प्रत्येक क्योंक में तीन बरावर बरावर क्षेत्रफल के प्लॉट थे। इस तीन प्लॉटी में तीन प्रकार की खादों का प्रयोग किया गया। किस प्लॉट में कीन सी लाद का उपयोग किया गया थह यानुच्छिकीकरण द्वारा निश्चय किया गया। इस निमस्त खार पाने वाले प्लॉटो में उपन की तुल्ला करके यह पता चल सकता है कि इस लायों के प्रमान में कोई विशेष अतर है या नहीं।

परतु इस प्रयोग में क्लॉक-प्रभाग, खाद-प्रमाग और प्लाट-प्रभाग के अतिरिक्त विचरण का एक और उद्युग्म है और बहु है पीचों की ख़खा। यद्यपि तीनी प्लॉटी में सैनफ़्क बराबर है परतु गेहूँ बोने का तरीका ऐसा हो सकता है कि इन प्लॉटो में पीचों की सच्या मित्र-निज्ञ हो। यह स्पप्ट है कि इस सख्या के अधिक या रुम होने की प्रभाष फुळ उपज को बडाने बर्यवा घटाने में सहायता पहुँचामया । फिर भी यह मार-स्वक नहीं है कि उपज पीधों की सख्या के कामुगत में ही हो। वर्धान इस उद्युग्न से उदयानि स्वरण को भी शूटि का एक भाग मानकर प्रभाग का किस्मण निया जा सकता है तथापि इस प्रकार के विक्लेषण में प्रावककात्रों का प्रसरण विधिक होगा तथा निरा-करणीय परिकल्पना का परीक्षण सामस्यवान (powerful) नहीं होगा। यदि इस उद्याम के उत्पन्न व्यवस्थ को हस इस प्रसरण विक्लेषण द्वारा हटा सकें ही परी-सण की सास्वर्ष (power) बह नायगी।

इसके लिए क्योंक । के जिस क्योंट में j—मी खाद का प्रयोग हुआ है उसको $\{y\}$ से स्वित करेंगे। $\{iy\}$ क्योंट की उपल को हम Y_{ij} तथा उसमें पीधो की सकता की हम X_{ij} से स्वित करेंगे।

निराकरणीय परिकल्पना H_s —खादो के प्रभाव समान है। कैकिएक परिकल्पना H_s —खादो के प्रभाव समान नहीं है।

§ २५७१ प्रेक्षण

प्रयोग के फल नीचे की सारणी में बिये हुए है। सारणी संख्या 252

उपचार		Y-1			se _{if}			
बलॉक रू	1	2	3	কুল Y,	ī	2	3	কুল X₁
ı	5	7	11	23	70	100	143	313
2	6	8	9	23	91	108	114	313
3	7	6	6	19	102	82	72	256
4		8	9	23	85	111	318	314
5	8	7	10	25	114	94	129	337
কুল Y X f	32	36	45	113 ==Y	462	495	576	1,533 =X

§ २५.७ २ विदलेपण

$$\begin{cases} \frac{\lambda^2}{5\times3} = 15667260 \\ \frac{XY}{5\times3} = 1154860 \\ \frac{Y^2}{5\times3} = 85127 \\ \begin{cases} \frac{\lambda}{5} = \frac{3}{5} x_{ij}^2 = 162,54500 \\ \frac{\lambda}{5} = \frac{3}{5} x_{ij} y_{ij} = 1201700 \\ \frac{\lambda}{5} = \frac{3}{5} x_{ij} y_{ij} = 89100 \\ \begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{5}{5} X_{ij}^2 = 157,87967 \\ \frac{1}{3} = \frac{5}{5} X_{i} Y_{i} = 1163633 \\ \frac{1}{3} = \frac{5}{5} X_{i} Y_{i} = 85767 \end{cases}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{5}{5} X_{ij}^2 = 158,04900 \\ \frac{1}{5} = \frac{3}{5} X_{ij} Y_{ij} = 11,70480 \\ \frac{1}{5} = \frac{5}{5} X_{ij} Y_{ij} = 86900 \end{cases}$$

सारणी संख्या 253 प्रसरण और सह-प्रसरन विक्रोपण सारणी

		-		
विचरण का उद्गम	स्वातत्र्य <i>सस्या</i>	γ²	xy	x ^e
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
ब्लॉक	4	B _{vv} ==6 40	B ₉₂ =87.73	B ₂₃ =1207.07
उपचार	2	T ₃₃ =17.73	T _{vs} =156 20	T _{em} =1376.40
त्रुटि	8	E _{yy} ==15.60	E _{s0} =224.47	E _{ma} =3289 93
बुल	14	S ₂₂ =39.73	S _{ss} =468.40	S _{ee} = 5873.40

यदि सहकारी चर के प्रभाव की उपेक्षा कर यी जाती तो उपचारों की तुलना

के लिए हमारा निकर $\frac{T_{m}/2}{E_{m}/8} = F$ होता बिसका बटन परिकल्पना के सहय होने पर F_{2g} होता। इस प्रयोग में F का मान 4-55 है जो F_{2g} के पाँच प्रतिशत बिंदु 4-46 से अधिक है। (देखिए सारणी सख्या 11.7) इस्पिल् हम निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकार कर देते। परतु वह बहुत सबच है कि इस अस्पीइति का कारण खाद के प्रमानों में अंतर नहीं बल्कि पीणों की सख्या में अंतर हो। यह पी सम्ब है कि लाद के प्रमानों में अंतर नहीं बल्कि पीणों की सख्या में अंतर हो। आहए अब हम पीपों की सख्या के प्रमान को सहस्रतरा विरोधन हारा हटाकर देसे कि हमारे उत्तर के निल्कर में कुछ अंतर पड़ता है या नहीं।

$$\widetilde{F} = \frac{\widetilde{F}_{xx}}{\sum_{xx}} = \frac{224.47}{3289.93}$$

$$= 0.06823$$

$$\widetilde{F} E_{yx} = 0.06823 \times 224.47$$

$$= 15.32$$

$$E'_{yx} = E_{yx} + T'_{yy} = 33.33$$

$$E'_{yx} = E_{yx} + T'_{xy} = 380.67$$

$$E_{xx} = E_{xx} + T_{xx} = 4,666.33$$

$$\therefore$$
 $\hat{\beta} = \frac{E'_{yy}}{E'_{xx}} = 0 \text{ o 8158}$

तथा $\hat{\beta} \times E'_{yx} = 0 \text{ o 8158 \times 380 67}$
 $= 31 \text{ o 6}$

बृद्धि वर्ग योग $= E_{yy} - \hat{\beta} E_{yy} = 15 \text{ o 60-15 } 32$
 $= 0.28$

हयोकि E_{yy} की स्वातभ्य संस्था 8 तथा $\widetilde{eta}\,E_{yz}$ वी स्वातभ्य संस्था z है इसलिए $E_{u} = \widetilde{\beta} E_{u}$, की स्वातत्र्य सरया 7 है। (उपचार + श्रुटि) वर्ग-योग = $E'_{yy} - \hat{\beta} E'_{yx} = 33 33 - 31 06$ = 2.27

.. उपचार वर्ग-योग == 2 27-0 28 == 1 99 क्योंकि E'_{uv} की स्वातच्य सख्या 10 है तथा $\hat{m E}E'_{uv}$ की स्वातच्य सब्या 1 है इसलिए $E'_{**}-\hat{\beta}E'_{**}$ की स्वातत्र्य सख्या 9 है।

सारणी संस्या 25 4

पौधों की संख्या के प्रभाव को हटाने के बाद उपचार-प्रभाव की जाँच

उद्गम	स्वातत्र्य संस्या	धर्ग-योग		वर्ग-भाष्य	अनुपात <i>F</i>		
_(1)	(2)	(3)		(4)			
उपचार	2		1 99	1 00	25 00		
नृटि	7	$E_{yy} - \widetilde{\beta} E_{yz}$	0 28	0 04			
उपचार + तृटि	9	E', β E', =	=2 27				

निकप F का यह मान एक प्रतिशत स्तर पर भी अर्थपूर्ण है। जब कि सहकारी चर की उपेक्षा करने पर प्रेक्षण फल र प्रतिशत स्तर चर अथेहीन है। इससे यह मालूम होता है कि सहकारी चर का प्रभाव हटा देने से हमारा परोक्षण अधिक शक्ति-शाली हो सकता है।

प्रयोग-अभिकल्पनाएँ अन्य भी अनेक प्रकार की होती है परत उनका विवरण देने कान तो इस पुस्तक में स्थान है और न यह आवश्यक ही है। अत प्रयोग-अभिकल्पना के विवरण को हम यही समाप्त करते हैं।

भाग ६

प्रतिदर्श सर्वेचण

Sample Survey

अध्याय २६

प्रतिदर्श-सर्वेक्षण के साधारण सिद्धांत General Principles of Sample Survey सरल याद्चिक्क प्रतिचयन Simple Random Sampling

१ २६.१ योजना के लिए सर्वेक्षण की आवश्यकता

भिन्नी भी पीजना को बनाने के पूर्व कुछ श्रांकड़ों की बावस्थकता होती है। नान कींजिए कि खत्तर प्रदेश सरकार का उद्देश्य १४ वर्ष से छोटे सब बावक-बाकिकाशों की मिं चुक्त विदात बेना है। इसके लिए यह निश्चित करना होगा कि किय-किस स्थान पर कितने क्लूज जीले खातें और उनमें वित्तने अध्यागक रखे जातें। इसके पूर्व कि क्लार इस प्रचार का कोई निश्चय करे उसे बदाचित्र निम्नस्थिवित बासो का प्यान खना होगा।

(१) १४ वर्ष के रूम के बारुक-चारिकाओं की सबसा दिवती है और नह क्लि गति से कर रही है। यदि सरकार की इस बारे में कोई भी सीवि है कि एक स्कूल में क्लिफ से कॉपफ हिनते विवाधियों को एउना चाहिए और विवाधीयों और किएकों की स्था में नदा अनुवाद रहना चाहिए तो सरकार को साभारण रूप में यह तात हो जामगा कि सुद योजना के किए हिनते हकत और विवास किसकों की आयरफरता है।

(२) बर्तमान स्थिति में उत्तर-अर्रेश में भिवते स्कूल है—जममें कितने विधार्थी मौर दिवाल है। यदि सरकार का शिक्षक-विधार्थी जनुपात अपना एक स्कूल में विधार्थियों की सप्ता के बारे में बोहे निश्चित मत्र गई है तो इस मत्र के स्थिर करने में दे सुपना उपयोगी तिक्र हो सबतों है। इसके मतिरक्त इसके यह पता चरेगा कि मत्रिक मत्र के कि स्वता चरेगा कि मत्र के मत्र के स्वता चरेगा कि मत्र के मत्र के स्वता चरेगा कि मत्र के मत्र के स्वता चरेगा कि मत्र के म

(३) सरकार को विश्वित्र स्थानो पर जन-संस्था का नितरण और एक स्थान से दूसरे स्थान तक जाने के किए सडको इत्यादि का झान यह निश्नव करने के किए आवस्यक है कि स्कुछ कहाँ खोळे जायें। (४) सरकार को उन पढ़े-लिखे लोगों की सस्या का भी ज्ञान होना चाहिए जो इन स्कूलों में शिक्षक का पद ग्रहण करने योग्य है और शिक्षक बनते के लिए राजी हैं।

हो सकता है कि इसके अलावा और भी अनेक प्रकार की सूचनाओं की आयरपकता योजना बनाने वालों को हो। यह केकल एक उदाहरण जा परतु आप स्वम विभिन्न योजनाओं को ज्यात में रक्कर यह पता लगा सकते हैं कि हरएक के लिए अंकरों को आवरपकता होती हैं। यह आंकड़े प्राय ऐसी समिट्यों से सबच रखते हैं जिनमें कुछ हकाहणों की मल्या परिमित्र (ध्याप्त) होती है। यह अंकडों को प्राय करते हैं कि हर अंकडों को प्राय करते हैं कि हिए वहुंबा सर्वेलण करना पड़वा है। यद्याय समीट परिमित्र होती है परतु प्राय हकाहयों की स्वया सर्वेलण करना पड़वा है। यद्याय समीट परिमित्र होती है परतु प्राय हकाहयों की स्वया हतनी अधिक होती है कि सर्वेशण को समिट्य है एक प्रतिवर्ध एक ही स्वाया पड़वा है। इस प्रकार के सर्वेशण को प्रतिवर्ध सर्वेशण (sample survey) की सज्जा दी आती है।

§ २६.२ सर्वेक्षण में बुटियाँ

इस तरह के सर्वेक्षण में दो तरह की त्रुटियों होती है।

- (1) प्रतिस्थान शृद्धि (Samphing error) —समन्दि से चुने हुए विभिन्न अतिराधी द्वारा हुए विभिन्न प्रान्तकरूक प्रान्त होते हैं जो देखल इसी कारण समन्दि प्रान्त के सिन्न होते हैं कि प्रतिकर्भ में समन्दि की हर एक दकाई नहीं होती। इस कारण से प्राक्कलन और प्राच्छ में जो जतर होता है उसकी प्रतिचयन पुटि कहते हैं। विभिन्न प्रतिकर्मन पुटि कहते हैं। विभिन्न प्रतिकर्मन के लिए यह मुटि भिन्न भिन्न होता। दिस्सी याद्वांख्यक प्रतिचयन प्रतिकर्मन प
- (2) अभ्यतिषयन नृष्टि (Non-Sampling error) —- व्यवसण में नृष्टि के क्षेत्र भी उद्गम हैं। यान जीनिजय कि हमें उत्तर प्रदेश के मध्यवाधिय परिवारों की क्षेत्रिया आप को प्रमुक्त कर तथा है। प्रास्करन से पूर्व यह जानभा वावस्थक है कि मध्य वर्षीय परिचारा में हमारा बया नात्म है और आप वर्ष परिचारा पर मा हो। यह भी जानमा जरूरी है कि परिचार में किस प्रकार के व्यक्तियों को सीमाणित माना जायगा। इन सब परिमाणाओं के होते हुए भी बहुत सम्ब है कि कुछ अध्यन्नीय परिचार के सुक्त है कि उत्तर है कि हुए अध्यन्त के सुक्त कर कि कि हुए जायों की तह है कि परिचार के सुक्त कर है कि उत्तर है कि उत्तर वास्तर के सुक्त कर हिम्म करते हैं कि परिचार के सुक्त कर हिम्म करते है कि उत्तर होमाधिक कर हिम्म करते सर्वस्थाण में गठती है स्वध्वस्थापित कर हिम्म करते हम्म
नारों । यह भी राजब है नि नुष्ठ परिनारा को नमनी जाय ना ठोन पता न हो रहािरूए उनने प्रस्त करके जो जाय का जनुमान रूमाया जाता है वह बास्तिमक जाय से मिस हों। बुख कारणों से जाय स्रवमी प्रस्तो ना एतर जान गृह्व कर भी यनत दिया जा सन्तार है।

सनाय की उपन के सबैदाय में यह पता चलाना होता है नि कितने केनलक में नाम मा है। इस मकार के सबैदाय में लिए सनुगमाता (unvesting to the right of the righ

किसी भी अच्छे सर्वेक्षण का व्येव इन दोगो प्रकार की नुदियों की सीमित रखना होंगा है। मित्तचयन मुदियों को विशोध प्रतिचयन विधि और प्राक्तकत विधि हारा कन किया जा सकता है। यह समय् है कि यदि प्रतिवर्धों में समर्थि की प्रयोक्त काले हैं तो प्रतिचयन चुटि शुन्ध होंगी। अप्रतिचयन चुटियों को कन करने के किए अतु-संपालों के विस्तान और नितमन की आवस्यकता है। वे जितने और क जम्मनी होंगे और जमपर जितना अधिक नियंत्रण रहेगा जमनी हो जयतिचयन चुटियों पम होंगी। यह स्वान केने को हाल है कि प्रतिचान-परिधाण बढ़ने से प्रतिचन्धन मुटि सी परिशो है परतु अप्रतिचयन चुटि सदती है। यह सम्बन है कि एक छोटे प्रतिकर्स से प्राप्त प्रस्तान की कुछ प्रटिच्ही कार्योट के साथ प्रसादकत्व की मुटि से नम्प हो।

[§] २६३ अन्य उपादान

त्रुटि के असिरिशन मर्जेलण में और भी कई उपादानी (factors) का विजार रखना पड़ता है। इनमें धन और समय विशेष उस्लेखनीय है। किमी भी मर्वेशय के छिए एक निविचत भाता से अधिक धन व्यय गरना सभय नहीं होता। जितना अधिक प्रतिदर्श परिमाण होगा उतना ही अधिक धन व्यय करना पडेगा। यो पम सर्वेशण पर ध्यय करना पडेता है उसे सर्वेक्षण-व्यम (cost of survey) करहे हैं। और यह अदिवर्श-परिमाण पर हो गही बल्कि प्रतिचयन विधि और प्रावक्कन निधि पर भी निभेर करता है।

यदि सर्नेक्षण द्वारा आंकर्य यहुत देर में प्राप्त हो तो उनका महस्व पढ जाता है। उदाहरण के लिए भारत में १९५९ में उत्पन्न राावाजों के ओकड़ों की आव-दमकता इसिलए पड मकती है कि मरकार आयान- निर्मात के बारे में कोई निरम्प कर सके। यदि अल जावरवनता से बहुन कम हुआ हो तो लोगों को भूत के समिने के लिए विदेशों से अल मेंगाना पड़ेगा। और यदि अल आवस्पकरा में अधिक हुआ हो तो मधीनों आदि के अप के लिए इसको विदेशों में वैसकर विदेशों नम मुद्रा प्राप्त को जा विकरों है। परतु यदि यह बीकड़े हुसे १९६२ तक प्राप्त हो तो उनका महस्त्र समाप्त हो जाता है। यशिक पढ़ि कको के मी हुई हो तो उसका अलर उस समय कर पड़ हो चुका होगा और आंकड़ा का उपयोग सरकार के आलोचक केवल यह वह सकते के लिए कर सकते कि सरकार को १९६० में अमुक नीति अपनानी चाहिए थों और उसने दूसरी नीति अपना कर गज़ता का । प्रानकलनों को पोड समय मे प्राप्त करने के लिए की यह आवस्पक है कि प्रतिवर्ध बहुत बड़ा

सर्वेक्षण के सिद्धादों का अभिभाव धन समय और अन्य अनुवर्धों के अनुनत एक ऐसी मितवयन विधि और प्रावकलन विधि को प्राप्त करना है जिसके लिए प्रावकलन चूटि मूनतम हो। हम वहां केवल प्रतिचयन चूटि पर विचार करेंगे क्याँकि अन्य मुद्धों को कम करने के लिए प्रतिचयन विधि और प्रावकलन विधि नहीं वरन् विचाण, गियवण और अनुमत की आवस्यनता है।

६ २६.४ सरल यादृच्छिक प्रतिचयन (Simple Random Sampling)

पार्विष्ठक प्रतिप्यम की कई विधियाँ है जिनमें से सबसे सरक का नाम सरक याद्षिक्ठक प्रतिचयन है। मान छीजिए समिटि में N इकाइयों $U_1,U_p,U_p,\cdot U_N$ हैं। इन N इकाइयों में से n परिमाण के कुछ $\binom{n}{N}$ अलग-अलग प्रतिरभं चुने जा सकते हैं। मिद प्रतिरभी इक प्रनार चुना जाय कि इन सब प्रतिरभी के चुने जाने की प्राधिकता $\frac{n}{|U|}$ हो वो इस निथि को सरक याद्षिक्ठक प्रतिचयन कहते हैं। इसवी

· विधि यह है कि पहिले तो Nदकाइयों में से एक इकाई इस प्रकार चुनी जाय कि सब

इस्तरमं से चुने जाने की प्रायिकता समान वर्षात् $\frac{\mathbf{z}}{N}$ हो । फिर बाकी बची हुई (N-1) इकाइयों में से एक इकाई इस प्रशार चुनी जाय कि इस बची हुई दकाइयों में से एक इकाई इस प्रशार चुनी जाय कि इस बची हुई दकाइयों में से प्रत्येक की चुने जाने की प्रायिकता समान याने $\frac{\mathbf{J}}{N-1}$ हो । इसी तरह जमस एक एक करने N इकाइबा को इस प्रकार चुना जाय कि प्रत्येक चुनाव में साकी बची हुई इकाइयों में से प्रत्येक इनाई के चुने जाने को प्रायिकता समाय रहे।

६ २६५ प्रावकलन

मान क्षीजिए हम किसी विशेष चर x के श्रीयत मान \overline{X} ना प्राक्कलन करना चाहते हैं। यदि x-वी इकार्द U, के लिए इस चर का मान X, है वो

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \chi_{l} \tag{26.1}$$

हम |- नी नुनी हुई हनाई के लिए x के मान को x_i से सूचित करेंगे । $x_{ij},x_{ij} = x_{ij}$ से मा यादु क्लिक कर है जो प्रस्थेक मान $X_{ij} = x_{ij} = x_{ij} = x_{ij} = x_{ij}$ शिक्षे एमान प्राधिकता $\frac{1}{N}$ से महन करते हैं। यदि हम प्रतिदश्च माध्य की \hat{x} से सूचित गरें हैं।

$$E(\widehat{\mathbf{x}}) = E\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{x}} \\ \overline{\mathbf{n}} & \underline{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

$$= \overline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{x}} \\ \overline{\mathbf{n}} & \underline{\mathbf{x}} \\ \overline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{x}} \end{bmatrix} E(\widehat{\mathbf{x}})$$

$$= \overline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{x}} \\ \overline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{x}} \\ \overline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

$$= \overline{\mathbf{x}} \\ E(\widehat{\mathbf{x}}) = \overline{\underline{\mathbf{x}}} & \underline{\mathbf{x}} \\ \overline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{x}} \\$$

इस प्रकार हम बेखते हैं कि \overline{X} का एक अनीवनरा प्रावकतम्म \hat{x} है। किसी इसरोप्रतिचयन विधि से शुक्ता करने के पूज यह जानना आवश्यक है कि इस प्रावक्तक का प्रदारण निजना है।

२६.६ प्राक्कलक का प्रसरण

$$\begin{split} V\left(\overline{x}\right) &= B\left(\overline{x} - \overline{X}\right)^2 \\ &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})\right]^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} E\left(x_i - \overline{X}\right)^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{j \ge 2} E\left(x_i - \overline{X}\right)(x_j - \overline{X}) \end{split}$$

यह स्पष्ट है कि ऊपर दी हुई प्रतिचयन विधि के लिए

$$E(x_i - \overline{X})^2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{X})^2$$

$$\overline{\alpha}^{\text{eff}} E \langle x_i - \overline{X} \rangle (x_j - \overline{X}) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq 1}^{N} \langle X_i - \overline{X} \rangle \langle X_j - \overline{X} \rangle$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^{N} (X_i - \overline{X}) \sum_{j \neq 1}^{N} (X_j - \overline{X})$$

$$= \frac{-1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \widetilde{X})^2$$

क्योंकि
$$\sum_{j\neq i} (X_j - \overline{X}) := \sum_{j=1}^N (X_j - \overline{X}) - (X_i - \overline{X})$$

$$\inf_{j=1}^{N} (X_j - \vec{\lambda}) = 0$$

$$V(x) = \frac{1}{n^2} \left[\frac{n}{N} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2 - \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \right] \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2$$

$$= \frac{N-n}{Nn} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2$$

$$=\frac{N-n}{Nn} S^2 \qquad \dots (26 2)$$

$$\overline{\text{Vic}}^{\dagger} \,\, S^2 = \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{N} \,\, (X_i - \overline{X})^3}_{N-1} \qquad \qquad \dots . (26.3)$$

र्यार प्रतिवस्तें परिमाण श यसेन्द्र बढा हो सो Σ वा बटन प्राय प्रतामान्य होगा । यदि हम इसके मानक विचलन का प्राक्तलन कर सर्वे दो समिन्द्र प्राचल \widetilde{X} के लिए दिन्दास्थ्यतराज्य का प्राक्तलन भी किया जा तक्वा है । हम नीचे $V\left(\omega\right)$ का प्राक्तलन माजूम करी और उसके वर्गमूल का उपयोग मानक विचलन के प्राक्तलन के लिए करी |

§ २६७ प्रावकलक के प्रसरण का प्रावकलन

S के समान एक फलन 5° हम प्रतिदर्श के लिए परिमाणित करते हैं

$$s^4 = \frac{1}{n-1} \sum_{s=1}^{n} (x_s - \bar{x})^s$$
 . . (26.4)

यह सिद्ध करना आयन्त सरल है कि So का एक अनुभिन्त प्रायकलक 5 है।

$$E(s) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} E(x_i - \bar{X})^s$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} E[x_i - \bar{X}] - (\bar{x} - \bar{X})]^s$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} E(x_i - \bar{X})^s - n E(\bar{x} - \bar{X})^s \right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} E(x_i - \bar{X})^s - n \frac{N-n}{Nn} \frac{E(X_i - \bar{X})^s}{N-1} \right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^s - n \frac{N-n}{Nn} \frac{E(X_i - \bar{X})^s}{N-1} \right]$$

$$= \frac{E(X_i - \bar{X})^s}{N(N-1)(n-2)} \left[n(N-1) - (N-n) \right]$$

$$= \frac{E(X_i - \bar{X})^s}{N-1} = S^s \qquad (26.5)$$

V(x) কা অলগিনর মানকলক $\hat{V}(x) = \frac{N-n}{Nn} s^2$

हम साधारधातमा निसी प्राप्त 0 के प्राक्तलक को $\hat{0}$ से सूचित करेंगे 1 चिंद हम समिद्य योप $X \Rightarrow \sum_{l=1}^{N} X_l$ का प्राक्तल करता चाहिं तो स्पप्तवम

$$\hat{X} = N \tilde{x} \qquad \dots (26.6)$$

$$V(\hat{X}) = N^2 V(\hat{x}) = \frac{N(N-n)}{n} S^3 \qquad \dots (26.7)$$

$$\widehat{V}(\widehat{X}) = \frac{N(N-n)}{n} s^2 \qquad \dots (26.8)$$

: S' का अनभिनत प्रायकलक उ है।

§ २६८ अनुपात का प्रावकलन

ऊपर दिये हुए सूत्रों का उपयोग समस्ट में विजेष गुण वाली दकाइयों के अनुपात के प्राक्तकत के लिए भी किया जा सकता है। उदाहरण के लिए भान लीजिए कि एक नगर में N व्यक्ति है जिनमें से N_1 की उन्न १४ वर्ष अथवा उससे कम है। N_1 हमें बात नहीं हैं। हम नगर में १४ वर्ष से कम उन्न वाले व्यक्तियों का अनुपात

$$P=rac{N_1}{N}$$
 जानमा चाहते हैं।

मान लीजिए X_i एक चर है जो । बें व्यक्ति की उस्र १४ वर्ष से कम होने पर मान x प्रहण करता है अन्यया मान 0 । इस प्रकार नगर के प्रत्येक व्यक्ति के लिए एक चर है । यह आप देख सकते हैं कि $\sum_{i=1}^{N} X_i = N_i$ और एक ॥ परिमाण के प्रतिदर्श में $n_1 = \sum_{i=1}^{N} x_i = \sqrt{1000}$ के प्रतिदर्श में $n_2 = \sum_{i=1}^{N} x_i = \sqrt{1000}$ के प्रतिदर्श में $n_2 = \sqrt{1000}$

$$\therefore \hat{P} = \left(\frac{\hat{N}_1}{\hat{N}}\right) = \hat{\hat{X}} = \bar{x} = \frac{n_3}{n} = p \qquad \dots (26.9)$$

प्रतिदर्श में १४ वर्ष से कम उम्र के व्यक्तियों का अनुपात

इसी प्रकार
$$V\left(p\right) = \frac{N-n}{Nn} \sum_{l=1}^{N} \lambda_{l}^{2} - N\overline{X}^{k}$$
 [देखिए समीन रण (26.2)]

$$= \frac{N-n}{Nn} \frac{N_1 - N\left(\frac{N_1}{N}\right)^n}{N-1}$$

$$= \frac{N-n}{Nn} \frac{NP - NP^2}{N-1}$$

$$= \frac{N-n}{n(N-1)} P(1-P)$$
 (26 10)

 $\hat{V}(p) = \frac{N-n}{Nn} \frac{np-np^2}{n-1}$ (हेलिए समीकरण 268)

$$= \frac{N-n}{N(n-1)} p (1-p)$$

$$= \frac{1}{N(n-1)} p (1-p)$$

उदाहरण —

$$\hat{V}(p) = \frac{\frac{80}{200}}{\frac{200}{5}} = \frac{2}{5}$$

$$\hat{V}(p) = \frac{1,000 - 200}{1,000 \times 199} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{24}{24,875}$$

💲 २६९ विचरण-गुणाक और प्रतिदर्शे परिमाण

मदि किसी प्रावकलन t का मानक विचलन a_t और वाच्य t_t हो तो $\frac{a_t}{\mu}$ । t का विचरण गुणाक (coefficient of variation) कहते है और इसे C V(t) है मूचिंग करते हैं। बहुत्ता सर्वशन का उद्देश्य एक निश्चित मध्या से कव विचरण गुणाक वाला प्रावकलन प्राप्त करना होता है। सरक याद्विल्य प्रतिचयन में विचरण गुणाक केवल प्रतिचया परिमाण पर ही निर्मर करता है। x का निचरण गुणाक $\sqrt{\frac{N-n}{Nn}} \frac{S}{X}$ है। यदि हुमें समिध्द के लिए $\frac{S}{X}$ का अच्छा अनुमान हो

जिसे हम C से मूचित करें और यदि हम यह चाहते हो कि के का विचरण गुणाक रूपमा कही तो हम प्रतिदर्ध परिमाण 18 को निम्नलिखित सूत्र द्वारा निश्चित कर सकते हैं—

$$\sqrt{\frac{N-n}{Nn}} C = \alpha$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{Nn}} - \frac{1}{N} = \frac{\alpha^{g}}{C^{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{n}} - \frac{1}{N} = \frac{N\alpha^{g} + C^{g}}{NC^{g}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{Nn}} - \frac{NC^{g}}{NC^{g}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{Nn}} - \frac{NC^{g}}{NC^{g}}$$

जबाहरण-पिट हमें यह जात है कि १४ वर्ष से कम उन्न के व्यक्तियों का अनु पति प्राय ३० प्रतिशत है तो X = 0 3,

$$S^2 = \frac{NP(1-P)}{X-1} = \frac{N}{N-1}$$
 (0 3×07) विशिष् समीकरण 26 10]

यदि N प्रवेष्ट रूप से बड़ा हो तो $\frac{N}{N-1}$ की जगह सरकता के लिए : रख लेने से कोई विशेष शृदि नहीं होगों । इस प्रकार

$$C^2 = {0.3 \times 0.7 \atop 0.3 \times 0.3} = {7 \over 2}$$

यदि हम p के निचरण गुणाक को 2 प्रतिसत के खगभग चाहते हैं तो

$$\alpha^2 = (0.02)^2 = 0.0004$$

• ছভিন্তন সনিবয় ধবিদাখ
$$n = \frac{7N/3}{0.0004N+7/3}$$

यदि N बहुत ब ${f s}$ । हो तो

$$\begin{array}{r}
1 - \frac{7}{3 \times 9004} \\
= \frac{70000}{12} \\
= 5834
\end{array}$$

अध्याय २७

स्तरित प्रतिचयन (Stratified Sampling)

१ २७.१ परिचय

सरल प्राप्तिष्यक प्रतिषयन का प्रयोग केवल उस बसा में किया जाता है जब मानित के बारे में कोई जान नहीं अपका मिंद कुछ जान हो भी वी बहुत मामूली सा। व समिति के बारे में जिल प्रकार का लोग जिलमा जान होता है उसके अनुसार प्रतिचयन सिम में स्वाप्ति के बारे में जिल प्रकार का लिए जिलमा जान होता है उसके अनुसार प्रतिचयन विभिन्न से साम के स्वाप्ति के सिम में से एक नाशियत विभिन्न से साम केवल में से एक नाशियत विभिन्न करने अल्लेक में से अलग-अलग सरफ प्राप्तु फिक्क प्रतिचयन करने की है। इस विभिन्न केवलित सरक प्राप्तिक प्रतिचयन करने की है। इस विभिन्न केवलित सरक प्राप्तु कि प्रतिचयन (stratified simple random samplung) वहते हैं।

९ २७.२ प्राक्कलन

मान लीजिए समीट को le स्तरों में विभाजित कर दिया गया है जिसमें से !-वें स्तर को S₁ से मूचित किया जामना । मान लीजिए कि S, में कुल N, इकाइयी है और इसकी j वी इकाई के लिए x ना मान X₁, है । इसके बतिरिनत

$$\begin{array}{lll}
X_i \\
\Sigma X_{ij} = X_i \\
k \\
\Sigma X_i = X
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
k \\
\Sigma N_i = N \\
E^{ij} \\
X^{ij} = X$$

पि S, में से j-श्री चुनी हुई इकाई के अके मान को अन से सूचित किया जाम सीरयदि i-सें स्तरमें से n, इकाइबा चुनी जायें ती 🎉 का एक अनभिनत प्राप्तकलक

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i} x_{ij} \stackrel{a}{\approx} 1$$

इसन्ति
$$E \underset{i=1}{\overset{k}{\sum}} N_i \, \overline{X}_i = \underset{i=1}{\overset{k}{\sum}} N_i \, \overline{X}_i$$

$$= \underset{i=1}{\overset{k}{\sum}} X_i$$

$$= X \qquad \qquad \dots \cdot (27.1)$$

स्पष्ट है कि
$$\overline{\mathbf{X}}$$
 का अनभिनत प्राक्तलक $\frac{\mathbf{I}}{N} \overset{k}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} N_i \overline{\mathbf{X}}_i$ है।

§ २७ ३ प्राक्कलन का प्रसरण $V\left[\sum\limits_{i=1}^k N_i \overline{\mathbf{X}}_i\right] = \sum\limits_{s=1}^k V(N_i \overline{\mathbf{X}}_i)$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i \left(N_i - n_i \right)}{n_i} S_i^2 \dots (27.2)$$

जहाँ

$$S_i^2 = \sum_{j=1}^{N_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \dots (27.3)$$

§ २७.४ प्रसरण का प्राक्कलन

$$\widehat{V}\left(\sum_{i=1}^{k} N_{i} x_{i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_{i} (N_{i} - n_{i})}{n_{i}} s_{i}^{a} \qquad ...(27.4)$$

जहाँ
$$s_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(x_{ij} - \overline{x_i})^2}{n_i - 1}$$
 (27.5)

$$\overrightarrow{V} \quad (\widehat{X}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{N_{i}(N_{i} - n_{i})}{N^{2}} s_{i}^{2}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{N_{i}}{N}\right)^{2} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{N}\right) s_{i}^{2} \quad \dots \quad (276)$$

§ २७ ५ विभिन्न स्तरो मे प्रतिदर्श प्ररिमाण का वितरण २७,५,१ समानुपाती वितरण

क्षेत्र हमारे सामने समस्या यह है कि कुछ प्रशिवय परिपाण $u = \sum_{j=1}^{j_0} n_j$ के दिये होने पर विभिन्न स्तरों के प्रतिदश परिमाण n_j को किल प्रकार निरिक्त किया जाय । एक तरीका तो यह है कि प्रतिदय परिमाण स्तरा को दशाइया की सस्या के कृत्यात से हैं। इस प्रकार के विशरण को समानुशती विशरण (proportional allication) कहते हैं।

समानुपाती वितरण के लिए प्राक्कलक को \widehat{X}_{prot} से सूचित किया जायगा।

$$\widehat{X}_{prop} = \sum_{i=1}^{k} N_i \, \overline{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_i} x_{ij}$$
(27.7)

नयोकि $\frac{N_i}{m} = \frac{N}{n}$ i=1,2 k

$$X_{prop} = \frac{1}{n} \underbrace{\begin{array}{ccc} k & n_i \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ x_{ij} & x_{ij} \end{array}}_{l=1} = \overline{x}$$

इस प्रकार के वितरण के लिए प्रावकलक बहुत सरल हो जाता है। इसके लिए

$$V\left(\widehat{X}_{ptop}\right) = \frac{k}{L} \frac{N_{i}(N_{i}-n_{i})}{N^{2}n_{i}} S^{2}$$

$$= \frac{1}{N_{i}} \frac{k}{L} (N_{i}-n_{i}) S^{2}$$

$$= \frac{1}{N_{i}} \frac{k}{L} \frac{N_{i}}{N} \left(1 - \frac{n_{i}}{N_{i}}\right) S^{2}$$

$$= \frac{N-n}{N_{i}} \frac{L}{L} \left(\frac{N_{i}}{N_{i}}\right) S^{2}$$

$$= \frac{N-n}{N_{i}} \frac{L}{L} \left(\frac{N_{i}}{N_{i}}\right) S^{2}$$
(27.8)

$$\hat{V}\left(\hat{X}_{prop'}\right) = \frac{N-n}{Nn} \sum_{i=1}^{L} {N_i \choose \widehat{N}} S_i^2 \qquad (279)$$

६ २७५२ अनुकूलतम वितरण

यदि सर्वेक्षण का व्यय प्रत्येक स्तर में केवल प्रतिदश्च इकाइयो पर निर्भर करत। हो और 1-वे स्तर में एक इवाई के सर्वेक्षण पर व्यय C₄ हो तो सपूर्ण सर्वेक्षण का व्यय फलन C निम्निलिखत होगा।

$$C = \sum_{i=1}^{k} C_i n_i \qquad (27 \text{ 10})$$

हुम इस प्रकार के वितरण $(n_1 n_2 - n_k)$ को निर्धारित करना चाहते है जिसके लिए प्रसरण दिये होने पर प्रसरण निम्नतम हो। इस वितरण को मालूम करने के लिए विम्नलिखित विधि का जप्योग करना होगा । स्वप्रयम हम एक परियाण Q की परिभाषा देते हैं।

$$Q = V\left(\hat{X}_{tt}\right) - \lambda \left[C_o - \sum_{i=1}^{k} C_i n_i\right]$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{i} N_i \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{N^2}\right) S_i^2 - \lambda \left[C_o - \sum_{i=1}^{k} C_i n_i\right]$$
(27 II)

अपदा
$$-rac{N_i^2}{N^2}rac{S_i^2}{n_i^2}+\lambda C_i=$$
 o $_{1=1,1},$ k

$$\therefore n_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{W_i S_i}{\sqrt{C_i}} \text{ with } W_i = \frac{N_i}{N}$$
(27 13)

$$\therefore C_o = \sum_{l=1}^{k} n_l C_l = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{l=1}^{k} W_l S_l \sqrt{C_l}$$

अथवा
$$\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{C_o}{\sum\limits_{i=1}^k W_i S_i \sqrt{C_i}}$$

$$\therefore n_i = [C_0 W_i S_i / \sqrt{C_i}] - \sum_{i=1}^k W_i S_i \sqrt{C_i}$$

मिंद $C_1 = C_2 = \ldots$ $= C_k = d$ हो $C_n = nd$

$$\therefore n_l = n \frac{W_l S_l}{\sum_{i \in W_l} S_i} \qquad (27.15)$$

६ २७६ स्तरण-विधि (method of stratification)

एक समस्या यह है कि यदि समस्टि को k स्तरों में विभाजित करने की स्वतन्नता हो तो यह विभाजन किल प्रकार किला जाय । यह हम इस प्रकार करना चाहेंगे कि प्राक्तकक का प्रसरण जहाँ तक हो सके कम हो जाय । हम जानते हैं कि

$$V_{ren}\left(\hat{\vec{X}}\right) = \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N}\right) S^2$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) \quad \frac{\Sigma \left(X_{ij} - \overline{X}\right)^{2}}{N - 1}$$

 $\{ \pi \mathbf{g}^{\dagger} \ V_{\mathbf{for}} \ \ \mathbf{u} \in \mathbf{u} = \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

$$= \frac{1}{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \left[\sum_{j=1}^{k} (N_j - 1) S_j^2 + \sum_{j=1}^{k} N_j (\overline{X}_i - \overline{X}_j)^2 \right]$$

र्माद N, और N बहुत बड़े ही तो

$$V_{rs^0}\left(\widetilde{\vec{X}}\right) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{l=1 \ l \neq 1}}^{k} W_l S_i^2 + \sum_{\substack{l=1 \ l \neq 1}}^{k} (\overrightarrow{X}_l - \overrightarrow{X})^2 \dots (2716)$$

$$\text{with } W_i = \frac{N_i}{N}$$

and
$$V(\widehat{X}_{prop}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} W_i S_i^2$$
(27 17)

$$V_{fan}(\widehat{\overline{X}}) - V(\widehat{\overline{X}}_{prop}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} W_i (\overline{X}_i - \overline{X})^2 \dots (27.18)$$

यदि हम समानुगती बितरण प्राप्त करने का विचार रखते हैं तो हम समाप्ति को हस प्रकार स्तरित करना चाहेंगे कि ऊपर लिखित अंतर अधिकतम हो। इसके लिए बिभिन स्तरों की समिष्टियों के माध्या में अधिक से अधिक अंतर होना चाहिए।

\$ २७ ७ सिनकटन (approximation)

इस प्रकार के अनुकृत्तम विवारण और अनुकृत्तम स्वारण को तभी प्राप्त किया जा सकता है जब हमें समस्टि के बारे में ययेट्ट जानकारी हो । उदाहरण के लिए अनुकृत्तम विवारण में 5, के झान की आवश्यक्ता है । परतु यह ऐसा समस्टि प्राप्त है जिसका ज्ञान सर्वेद्य के पूज नही हो सकता । इसके अज्ञात होने की अवस्था में हम समानुपाती विवारण प्रयोग करते हैं । स्वार्ट में यदि हमें 5, के किसी अच्छा प्रयोग करते हैं । यदि हमें 5, के किसी अच्छा प्रकार करते हो सा सा की जा सकती है । यदि हमें 5, के किसी अच्छा प्रयोग करते हैं । यदि हमें 5, के किसी सकती हो जिस तही होगा ।

यह भी हो सकता है कि हमें अ से पनिष्ठ रूप से सबधित किसी और जर y के लिए S'' का ज्ञान हो जहाँ

$$S_{I}^{\prime\prime 2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \langle Y_{ij} - \tilde{Y}_{i} \rangle^{2}}{N_{i} - 1}$$

और यह विश्वस हो कि $\frac{S_1'}{S_1}$ लगभग अवर है तो n_1 का कल्म S_1' के आधार पर किया जा सकता है। इस प्रकार के तरीके को अनुकूलता परिस्थित के लिए सिंग-कटन कहते है। यदि इस सिंतकटन और समानुगाती दितरा में अधिक अतर न हो तो नमानुगाती वितरण में अधिक अतर न हो तो नमानुगाती वितरण के हो। उपयोग अधिक अच्छा है क्योंकि इससे प्रसरण में विदीय अंदर नहीं पश्चा जब कि प्रानकलन बहुत सुरह हो यायगा।

इसी प्रकार अनुकूलतम स्तरण के छिए $\sum_{i=1}^{k} W_i \left(\overline{Y}_i - \overline{Y} \right)^2$ के मान की महत्तम बनान की चेप्टा की वा सकती है अहा \overline{Y}_i थेर \overline{Y} के मान जात है। इस प्रकार का स्तरण छगमा अनुकुळतम होगा।

अध्याय २८

द्वि-चरणी प्रतिचयन (Two-stage sampling)

५ २८.१ प्रतिचयन विधि और व्यय

अपर लिखी प्रशिचयन विधियों के लिए यह आतश्यक है कि प्रतिचयन कर्ता के पास सभी इकाइयो की एक मूची हो। बहुधा यह सभव नही होता। उदाहरण के लिए यदि हम भारतीय किसान परिवारों का प्रतिदर्श चयन करना चाहत है तो सब परि-वारों की मुनी प्राप्त करना उन्भग असभव होगा । यदि यह सुवी हम बनाना बाहे ती सर्वेक्षण से भी अधिक यन और समय इस मुची के बनाते में लग जायगा। इसलिए हमें किसी और प्रकार की प्रतिजयन विधि का आध्य लेना पडता है। यदि हमारे पास सब निसान परिवारों की सुनी हो भी तो सरक यादुन्छिक प्रतिचयन के अवलबन से यह बहुत सभव है कि प्रत्येक परिवार एक अलग ही गाँव से चुना जाय । भारत में गोंवा की कुल सख्या साढ़े छ लाख से भी अधिक होने के कारण इस बात की सभावना बहुन कम है कि हजार दो हजार परिवारों में से कोई दो परिवार भी एक ही गाँव से चुने जार्यमे । इस प्रकार के सर्वेक्षण में एक गाँव से दूसरे गाँव की यात्रा का व्यय कुछ सर्वेक्षण व्यय का एक मस्य भाग यन जायगा । यह बहुत सभव है कि इस यात्रा व्यय कम करके इस धन को अधिक परिवारों के सर्वेक्षण में ख्यामा जाता तो भूल प्रसरण में कभी हो जाती । इस प्रकार के दो कारण जो विशेष कर व्यय के कम करते से सबध एको है हमें उस प्रतिचयन विधि का अवलवन करने का सकेत करने हैं जो दि-चरणा प्रतिचयन कहलाता है।

§ २८२ द्वि-चरणी प्रतिचयन विधि

इसमें प्रतिजयन उत्तरीतर दो बरण में किया जाता है। यदि अतिम दक्षाद्यों भी मूची हमारे पास नहीं है बणना उनके सरक प्रतिचयन में अथ्वय्य दोता है तो हम पिट्टिने इस प्रनार को इकाइयों ने कई तमह बना केते हैं—सामारणत्या यह राष्ट्र पिट्टिने से हो बने होते हैं और इनके निर्माण की यावकाकता नहीं पटती। प्रतिचयन के पिट्टिने बरण में हम इस माहारों के हुए का चयन करते हैं। इस प्रकार के समूद प्रतिचयन की प्रयम-वरणों इकाइयों कहकाते हैं। इसके बाद कन चुनी हुई प्रयस परणी दकाइयों में से प्रत्येन में से कुछ निरिचत सस्या में अतिम दनाइयों को चुना जाता है। इस नारण में द्वितीम-क्षणी दकाइयों करलाती है। उदाहरणार्च निसान परियारों के ज्यन के लिए पहिले भारत में कुछ गाँवा ना चयन किया जा सनता है। इन चुने हुए गाँवों में सिमान परियार की भूजी तैयार की जा सनती है। इनमें से कुछ परिवार प्रदेश चुने हुए गाँव में से चयन किये जा सनते हैं।

५ २८.३ सकेत

मान लीजिए समिटि में N प्रयम-चरणी इकाइयाँ U_1 U_2 , U_3 ,.... U_N है ! -वी इकाइ U, में M, दिलीज-चरणी इचाइयाँ U_{i1} , U_{i2} , ...U, M_i है । मान लीजिए U_{ij} के लिए गुण x का मान X_{ij} है ।

$$M_{i} M_{i} M_{i} = X_{i} = X_{i}$$

$$N M_{i} N M_{i} N M_{i+1} = \sum_{j=1}^{N} X_{i,j} = \sum_{j=1}^{N} X_{i} = X$$

$$\frac{X_{i}}{\sum_{j=1}^{N} M_{i}} = \overline{X}$$

§ २८.४ प्रतिचयन -

पहिले प्रयम-भरणी इकाइयों में से n परिमाण का एक सरत यावृष्णिक प्रतिदर्श चुनते हैं। चुनी हुई इकाइयों में से t—यों के गुण x के मान को हुन x, से पुष्णिक करेगे। इस t—वी इकाई की कुल M_s दकाइयों में से हम m_s दिलोण-चरणी काइयों सरत याद्य याद्यिक प्रतिचयन द्वारा चुनते हैं। इसकी j वी चुनी हुई दिलीय-चरणी इकाई के x युग के मान को हम x, से सुचित करेगे।

९ २८.५ प्राक्कलन

इस द्वितीय-चरणी चयन के लिए $\dfrac{M_s}{m_s}\sum_{t=1}^{m_s}x_{ij}$ को X_t का प्राक्कळक माना जा सकता है ।

$$E_{z}\left[\frac{M_{z}}{m_{t}}\sum_{i=1}^{n_{t}}x_{ij}\right]=x_{i}$$

यहाँ हम $E_{\mathbf{s}}$ द्वारा प्रथम-चरणी डकाई दिये होने पर द्वितीय चरणी दकाइयो पर आश्रित प्रावरुलक के प्रव्यादित मान को मुखित करते हैं।

$$E_{1} \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i} = X$$

$$\therefore \hat{X} = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M_{i}}_{m_{i}} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$= \frac{N}{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{M_{i}}_{m_{j}} x_{j} \qquad (281)$$

६ २८६ प्रावकलक प्रसरण

$$V(\widehat{X}) = E_2 E_2(\widehat{X})^2 - X^2$$

$$= E_2 [V_2(\widehat{X}) + \{E_2(\widehat{X})\}^2] - X^2$$

$$= E_1 V_2(\widehat{X}) + \{E_3(E_2(\widehat{X}))^2\} - X^2$$

$$= E_2 V_2(\widehat{X}) + V_1 E_2(\widehat{X})$$

$$E_2(\widehat{X}) = \frac{N}{n} \sum_{\ell=1}^{n} x_{\ell}$$

$$\therefore V_1 E_2(\widehat{X}) = \frac{N(N-n)}{n} \frac{\sum_{\ell=1}^{N} (X_\ell - \frac{X}{N\ell})^2}{N-1} \qquad (28 2)$$

$$\text{with } V_2(\widehat{X}) = \frac{N^2}{n^2} \sum_{\ell=1}^{M} \frac{M_\ell(M_\ell - m_\ell)}{M-1} \frac{M_\ell}{N-1}$$

$$\therefore E_1 V_2(\widehat{X}) = \frac{N^2}{n^2} \sum_{\ell=1}^{M} \frac{M_\ell(M_\ell - m_\ell)}{M} \frac{M_\ell}{N-1} \qquad (26 3)$$

हम
$$\frac{\sum\limits_{t=1}^{N}\left(X_{t}-\frac{X_{t}}{N}\right)^{t}}{N-1}$$
 को M^{x} S_{b}^{x} और $\sum\limits_{t=1}^{M_{t}}\left(X_{t}-\frac{X_{t}}{M_{t}}\right)^{t}$ को M_{t}

 S^2_I द्वारा भूचित वर्ते जर्रा $M=rac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^N M_i$

$$: V(\tilde{\lambda}) = \frac{N(N-n)}{n} M^2 S_{\tilde{b}} + \frac{N}{n} \frac{N}{E} \frac{M_i(M_i - m_i)}{m_i} S_{\tilde{t}}^2$$

§ २८७ प्रसरण का प्रावकलन

यदि हम द्वितीय चरणी इक्षाद्रया के आधार पर s_{ij}^{2} से S_{ij}^{3} का प्राक्कलन करें ती

$$s_{I}^{2} = \frac{1}{m_{I}-1} \sum_{i=1}^{m_{I}} \left(x_{II} - \frac{1}{m_{I}} \sum_{j=1}^{m_{I}} x_{ij} \right)^{2}$$
 (28 5)

तया (284) के दूसरे आंग का प्राक्कल स्पष्टतया $\frac{N^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{M_i(M_i-m_i)}{m_i}$ s_i^2 हैं। इसी प्रकार प्रथम आंग का प्राक्कलन श्री प्राप्त किया जा सकता है।

$$E \sum_{i=1}^{n} (N\widehat{X}_{i} - \widehat{X})^{2} = N^{2}nV(\widehat{X}_{i}) - nV(\widehat{X})$$

$$= \frac{N^2(n-1)}{N-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 + N(r-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i(M_i - m_i)}{m_i} S_i^2$$

इसलिए प्रथम भाग का प्रान्कलन निम्नलिखित है

$$\underbrace{N(N-n)}_{n} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{X}_{i} - \frac{\hat{X}}{N} \right)^{2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{i}(M_{i}-m_{i})}{m_{i}} s_{i}^{2} \end{bmatrix} . \quad (28 5)$$

The state
$$\hat{V}(\hat{X}) = \frac{N(N-n)}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{X}_i - \frac{\hat{X}}{N}\right)^2 + \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i(M_i - m_i)}{m_i} s_i^2, \qquad (286)$$

यदि प्रत्येक प्रथम-चरणी डकाई में M इकाइयां हा जिनमे से m चुनी जायें तो

$$\frac{\widehat{\widehat{X}}}{\widehat{X}} = \frac{1}{\min} \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$
 (28.7)

$$V(\widehat{X}) = \frac{N-n}{Nn} S_b^z + \frac{M-m}{MNmn} \sum_{i=1}^{N} S_i^n$$

$$\overline{\text{4fd }} S_{w}^{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} S_{i}^{2}$$
 (28.8)

बौर
$$S_u^2 = S_E^2 - \frac{S_w^3}{M}$$
 नो

$$V(\hat{X}) = \frac{N-n}{Nn} S_v^2 + \frac{MN-mn}{MNmn} S_w^2$$
 (289)

यदि
$$s_w^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i^a$$
 तथा $s_n^a + \frac{1}{m} s_w^a = s_b^a$

 $=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{p}\left(\widetilde{x_{i}}-\frac{\Sigma\widetilde{x_{i}}}{n}\right)^{s}$ तो यह आप आमानी से सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\widehat{V}(\widehat{X}) = \frac{N-n}{Nn} s_u^2 + \frac{MN-nn}{MNnn} s_w^o \qquad (28 \text{ to})$$

१ २८८ अनुकूलतम वितरण

सिंद हम सब चुनी हुई प्रमम चरणी इकाइयो में से बराबर तक्या में द्वितीय-घरणी समाइसी मेरा क्यान करना नाहें तो हम यह जानना चाहुंगे कि कुछ व्यय के स्पि होने पर कितनी प्रमम चरणी इकाइयो बोर प्रम्थेक प्रथम चरणी इनाई में से कितनी कितीय परणी दकाइयो का व्यान निष्मा जाम।

हम निम्नलिखित व्यय फलन का उपयोग करेंगे

$$C = a + bn + dmn$$

णहीं 4 कुछ ऐसा व्याय है जिसका प्रतिदक्ष परिमाण से कुछ सबम नही है, ८ प्रत्येक प्रयम-चरणी इकाई से सर्वाधत और ४ अलेक द्वितीय चरणी दकाई से सर्वाधत व्याय है। इसी प्रकार प्रसरण फलन को निम्नलिखित रूप में रखा जा सकता है

$$V = -\frac{1}{N} S_{b}^{2} + \frac{1}{n} \left[S_{b}^{3} - \frac{\sum_{i=1}^{N} M_{i} S_{i}^{2}}{NM^{2}} \right] + \frac{1}{nn} \frac{\sum_{i=1}^{N} M_{i}^{2} S_{i}^{2}}{NM^{2}}$$
$$= a + \frac{b}{n} + \frac{d}{n}$$

कुल क्यय C_o के दिय होन पर हम m और n के ऐसे मानी का पता चलाना चाहते हैं जो प्रसरण को निम्नतम कर दें । इसके लिए हम एक परिमाण Q की परिमाण देते हैं।

$$Q = a + \frac{b}{n} + \frac{d}{ma} + \lambda \left[a + bn + dmn - C_o\right]$$

m और n को प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित समीकरण है

(i)
$$\frac{\partial Q}{\partial m} = \mathbf{o}$$
 अथवा $\frac{d}{m^2 n} = \lambda dn$ अथवा $mn = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{d}{d}}$ (28 II)

(1)
$$\frac{\partial Q}{\partial n} = 0$$

SECRET $\frac{b'}{n^2} + \frac{d}{mn^2} = \lambda [b + dm]$

SECRET $\frac{b}{n} + \frac{d}{mn} = \lambda [bn + dmn]$

SECRET $\frac{b}{n} = \lambda bn$

लयवा $n = \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{b}{b}}$ (28 12)

समीकरण (28.11) को (28.12) से विभाजित करने पर

$$m = \sqrt{\frac{d'/d}{b'/b}}$$

इस प्रकार यह प्रतीन होता है कि यदि व्यय-कलन उपरिक्षित्वत है तो m का अनुकृषतम मान कुल व्यय से स्वतन है। कुल व्यय के विभिन्न मान दिये होने पर केनल n के मान में अंतर आयेगा और m का मान स्थिर रहेगा।

यह स्पष्ट है कि a, b, d तथा d, b', और d' हमें पहिले से नाव नही हो मनने । इन प्राचनों के मान मालूम करने के जिए छोटे पैगाने पर एक आर्राभक सर्वेशण की आवश्यकता होती है। इसके आधार पर इन प्राचनों का प्रावकलन किया जाता है।

§ २८,९ **उदाहरण**

सप्तिय्त में कुछ 20,000 प्रथम-चरणी इकाइयाँ ची जिनमें ने प्रारंभिक सर्वेक्षण में 20 चुनी गयी। प्रत्येक अयम-चरणी इकाई में 3,000 दिनीय-चरणी इकाइयाँ थी। चुनी हुई प्रयम-चरणी इकाइनो में के प्रत्येक से से 3 दिवीय-चरणी इकाइयाँ चुनी गयी। इस प्रकार हुने निम्मिचियत सामग्री प्राप्त हुई

$$s_w^2 = \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} \sum_{j=1}^{3} \frac{(x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{2} = 12.24$$

$$s_b^4 = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} \left(\vec{x}_i - \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \vec{x}_i \right)^i = 25.13$$

$$\therefore \ s_u^2 = s_b^2 - \frac{1}{3} \ s_w^2 = 21.05$$

🗓 प्रसरण फलन का निम्नलिखित प्रान्कलन होगा

$$V = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{20,000}\right) \times 21.05 + \left(\frac{1}{m\pi} - \frac{1}{20,000 \times 1,000}\right) \times 12.24$$
$$= \frac{21.05}{m\pi} + \frac{12.24}{m\pi}$$

$$d = 0, b' = 21.05, d' = 12.24$$

368

इसके अलावा हमें निम्नलिखित a, b और c के मान प्राप्त हुए।

$$m = \sqrt{\frac{42 \text{ 10} \times 12 \text{ 24}}{21.05 \times 6.12}}$$

यदि सर्वेतच के लिए कुल 5,000 काए मनूर हुए हो तो 5,000 क्पए = 1,000 रेपए + (42 10) n क्पए + (6 12) _mn क्पए परंतु m = 2

 $h = \frac{5000 - 1,000}{4210 + 1224}$

अध्याय २९

सामृहिक प्रतिचयन (Cluster Sampling)

§ २९.१ सामूहिक प्रतिचयन

सिंह हमें क्ष परिमाण का एक अतिवहं चुनना हो तो समस्टि को क्षांस इराइयों के सहुते में विभाजित करके इनने से एक समृत को चुना जा सरता है। इस अकार के मितियम को सामृतिहरू प्रतिवसन करते हैं। यह आवश्यक नहीं है कि अरवेक समृत् में कैशानी के स्वाम कर करते हैं। हम इस का मितियम को सामृतिहरू प्रतिवसन करते हो हो अपना के कर एक ही समृत् का चयन किया जान। उदाहरण के लिए किसान परिचारों के सर्वेक्षण के यदि हम कुछ गांवों को चुने और इन गांवों के सभी किसान परिचारों का सर्वक्षण करें तो यह एक सामृतिहरू अतिचयन होगा। अप सामृतिहरू अतिचयन को दि-सरणी अचयन का एक सीमार क्य समझ सन्दे हैं जिसमें क्षाः—Ma

मान लीजिए हुल समीट को K समूहो में बिभाजित किया गया है और हमों से k समूहों का सरक याद्ष्किक प्रतिचयन किया गया है। 1-में चुने हुए समूह के लिए पुण 2 के योग को 21 सुचित किया जायगा।

$$E\left[\frac{X}{k}\sum_{i=1}^{k}x_{i}\right] = \sum_{i=1}^{K}X_{i} = X$$
(29.1)

इस प्रकार इस प्रचयन-विधि के लिए गुग-सम्बिट-पोग का प्रायकलक

$$\widehat{X} = \frac{K}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i \, \xi_1$$

§ २९.२ अनुपाती **पा**क्कलन

यदि हमें समस्य की कुछ इकाइयो की सक्या $M=\sum_{i=1}^{N}M$ जात हो तो हम X के हम प्राप्त उठक को M से जाय देकर $X=\sum_{i=1}^{N}$ का प्राप्त कर सकते हैं। परतु बहुषा हमें समस्य की कि से काइयो की शख्या ज्ञात नहीं होती। यदि हम प्रति किसाल परिवार ज्ञाय का प्राप्तकार कर सकते हैं। परतु बहुषा हमें समस्य की कुछ हमात की एक्स प्रति किसाल परिवार ज्ञाय का प्राप्तकार की सकता बाहे तो हमें कुछ निशात की परवारों की सकता जात

होनी चाहिए, तभी हम इस प्रवार के प्राक्वलन का प्रयोग कर सकते हैं। जिस प्रवार कियान परिवारों की कुल आय का प्राक्वलन किया गया है उसी प्रकार कुल कियान परिवारों की सहया का भी प्राक्वलन किया जा सकता है। इस दो प्राक्कलनों के अनुपात से हमें प्रति क्यान परिवार आय का एक प्राक्कलन प्राप्त हो जाता है। मिट। क्या ने जुक्त हुए गांव में कियान परिवारों की सख्या था। हो तो कुल परिवार सख्या का प्राक्कलक

$$\widehat{M} = \frac{K}{k} \sum_{t=1}^{k} m_t \qquad \dots (29.2)$$

$$\therefore \widehat{X}_{\widehat{M}} = \frac{\sum_{t=1}^{k} x_t}{\sum_{t} m_t} \qquad \dots \dots (29.3)$$

इस प्रकार की प्रावकरून विधि को अनुपाती-प्राक्करून (fatio estimation) कहते हैं क्योंकि यह दो प्रावकरूनों के अनुपात से प्राप्त होता है। यह प्राक्करून अनिभनत नहीं होता। यदि M का जान हो तो दो पुकार के प्रावकरूक हो सनते हैं।

(1)
$$\hat{\overline{X}}_1 = \frac{\hat{X}}{M}$$

(2)
$$\hat{X}_1 = \frac{\hat{X}}{\hat{M}}$$

यदि विभिन्न गाँको की प्रति किसान-गरिवार-आय में विशेष अतर न हो परंतु किसान परिवारो की सच्या में बहुत अतर हो वो यह देखा जा सकता है कि दूसरा प्रावण्यक \hat{X} , अभिनत होते हुए भी \hat{X} , से उत्तम होगा।

§ २९.३ व्यवस्थित-प्रतिचयन (Systematic Sampling)

सामूहिक प्रतिपयन का एक बिगेप रूप व्यवस्थित-प्रतिचयन है। मान लीकिए कि समिटि में कुछ n/द इकाइया है जिनमें से n इकाइयो का एक प्रविदर्श चुनना है। यदि n बहुत बढ़ी सख्या हो तो इस परिमाण के सरल व्यवस्थिक प्रतिचयन में माफी समय कम सबता है। इससे अधिक सरल विधि निम्मालिदित है।

सरल यादुम्लिक प्रतिचमन द्वारा 1 से k के बीच में कोई सल्या चुन लीजिए। मान लीजिए यह सल्या r है। यदि i—वी इकाई को U_r से सुचित किया जाय ती प्रतिदर्श प्राप्त करने के लिए निम्मलिखित इकाइया चुन लीजिए —-

 U_t , U_{t+k} , ..., U_{t+k} , ..., U_{t+k} , ..., U_{t+k} , $U_{t+(n,1)}$? दश उपार के राज्यवान को अवस्थित प्रतिचयन, प्रथम चुनी सख्या r को माद्द्-खिक आरम (random start) और k को प्रतिचयन जतराज (sampling interval) क्हते हैं।

यह देखा जा सकता है कि यह भी धामूहिक प्रतिचयन ही का एक विदोष रूप है। इसमें समिद्ध को n इकाइयों के निस्नानिश्वत k समूहों में विद्याजित किया जाता है।

 U_r , $U_{r+\mu}$, $U_{r+\nu_k}$, $U_{r+(\nu_r)_k}$; r=1,2,3, k व्यवस्थित प्रतिचयन द्वारा हम इनमें से एक समूह को नुझ केते हैं।

\$ २९४ प्रारोहक समूह (Overlapping clusters) बहुना समादि की कुछ इकाइयों की सक्या N की प्रतिदर्श परिमाण n और किसी पूर्णाक के गुणन कर के रूप में नहीं तथा जा सकता। उदाहरण के लिए यदि 107 इकाइयों में है 10 की चुनना हो तो ऊपर जिली विधिन नहीं अपनायीं जा सकती। इसके लिए जिस विधि का प्रयोग मिल्या आता है, यह कीचे की हुई है।

पहिले 1 और N के बीच एक सक्या r की यादुष्टिक प्रतिचयन द्वारा चुना जाता है । यदि $\frac{N}{n}=k\frac{1}{n}$ (अर्थात् n का माग N में k बार जाता है और l शेष यय

जाता है, दूसरे शब्दों में k उन सब पूर्ण संस्थाओं में से महत्तम है जो $\frac{N}{n}$ से छोटी

हैं) तो इस चयन में ह को यादुन्छिक आरभ और k को अतराल लिया जाता है ह इस प्रकार पुना हुआ प्रतिदर्श निम्नलिखित होता है

 U_{r} , U_{t+k} , U_{r+2k} , U_{r+tk} , $U_{r+(n-1)k}$

महाँ जब r+:k>N हो जाम तब Ur+:k के स्थान में Ur+:k-N चुना जाता है। उदाहरण के लिए यदि N=107, n=10 तो k=10 । यदि 1 और 107 के बीच चुनी हुई सस्या 89 हो तो प्रतिदश निम्नलिखित होगा

इस प्रकार के प्रतिचयन को भी व्यवस्थित प्रतिचयन कहते हैं परतु जिन समूहो को चुना जा सकता है वे परस्पर जपवर्जी (exclusive) नही होते बल्जि प्रारोहक (overlapping) होते हैं। इस प्रकार के व्यवस्थित प्रतिचयन के लिए भी प्रतिदर्ध-माध्य समध्य-माध्य वा विनिधनत प्रावक उन होता है।

§ २९५ साम्हिक प्रतिचयन मे प्रसरण

यह स्पष्ट है कि सामूहिक प्रतिचयन के लिए यदि प्रसरण को $V_{\mathcal{O}}$ से सूचित किया जाय तो

$$V_{e} = \frac{K(K-k)}{k} \times \frac{\sum_{i=1}^{K} \left(X_{i} - \sum_{i=1}^{K} X_{i}\right)^{2}}{K-1}$$
 (294)

§ २९६ प्रसरण का प्राक्कलक

$$\stackrel{\wedge}{V_{c}} = \frac{K(K-1)}{k} \frac{\sum_{j=2}^{E} \left(v_j - \frac{\sum_{i=1}^{E} x_i}{k-1} \right)^3}{k-1}$$
(29.5)

यदि प्रतिदश्त में केवल एक समृह भूगा जाय वैसा कि व्यवस्थित प्रतिचवन में होता है तो समस्यियोग के प्रावकलक के प्रसरण का प्रावकलन नहीं क्या जा सकता। ई २९७ सामृहिक और सरल यादृष्टिकक प्रतिचयन की तलना

आप यह जानना चाहेंगे कि सरल यादृष्टिक प्रतिचयन की सुकना में सामूहिक प्रतिचयन से प्रान्त प्राक्कलन का प्रसरण किस अवस्था में अधिक और किस अवस्था में कम होता है।

$$\begin{split} \langle N-1 \rangle S^2 &= \sum_{j=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \ j=1}}^{K} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \ j=1}}^{n} X_{ij} \right)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K} \left(X_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \ i=1}}^{K} X_{ij} \right)^2 \\ &= \left(n-1 \right) \sum_{i=1}^{K} S_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K} \left(X_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \ i=1}}^{K} X_{ij} \right)^2 \end{split}$$

यदि हम
$$\frac{I}{K} \sum_{I=1}^{2} S_{I}$$
 को S_{W}^{2} से सूचित करें तो

$$V_{e} = \frac{nK(K-k)}{k(K-1)} \left[(nK-1)S^{2} - K(n-1)S^{2} \right]$$
 (29.6)

$$\frac{Kn^2(K-k)}{nk} S^2$$

$$= \frac{nK(K-k)}{k} S^3$$

. (29 7)

सरल गाद्बिष्टक प्रतिचयन से सामूहिक प्रतिचयन उत्तम होगा गदि

$$(nK-1)S^2-K(n-1)S^3_w < (K-1)S^2$$

अथवा $K(n-1)[S^2-S^2_w] < 0$
अथवा S^2

\$ मुहाम्यन्तरिक प्रसरण है। हम देखते है कि समुहाम्यन्तरिक प्रसरण कुळ समीटि के प्रसरण से अधिक हो ठो सामृहिक प्रतिचयन अधिक उत्तम होता है। यदि विभिन्न समृहो के बनाने की हमें स्वतनता हो और ज्यव में इस समृहों के मिनाने को हमें स्वतनता हो और ज्यव में इस समृहों के मिनाने से कुछ अंतर न गरे तो यह निर्माण इस प्रकार करना चाहिए कि वे ऑपक-स-अधिक विवास (heterogenous) हो। अर्थात् समृहाम्यन्तरिक प्रसरण अधिक-स-अधिक हो।

अध्याय ३०

अनपाती प्राक्कलन (Ratio Estimation)

६ ३०.१ अनुपाल का प्रावकलन

यदि दो समस्टि-योग X और Y के अनुपात $R = rac{Y}{ imes}$ का प्रावकलन करना हो

सी X और Y के अलग-अलग प्राक्तलमी \hat{X} तवा \hat{Y} के अनुपात $\hat{R} = \dfrac{\hat{Y}}{\hat{X}}$ का इसके लिए प्रयोग किया जाता है। यह सिद्ध किया वा सकता है कि इस प्रकार का प्राक्तलन अपनियत नहीं होता।

मार्चन जनावित पहुँ होता। मार्चन क्षेत्र होता हो तो इस प्राक्तलक की स्थितित हो \hat{Y} और \hat{X} स्थानित और माध्यवर्ग-बृष्टि (mean square error) का सिन्नटन \hat{Y} और \hat{X} के प्रक्षराओं और सहस्रक्षराणे तथा ब्राधनितयों के फलन के रूप में किया जा सकता है। में सिन्नटन निम्निटियल है—

§ ३०२ अनुपाती प्राक्कलक अभिनति

$$B(\hat{R}) = E(\hat{R} - R)$$

$$= E\left[\frac{1}{\hat{X}}(\hat{Y} - R\hat{X})\right]$$

$$= X \left[\frac{1}{\hat{X}} + \frac{1}{X'}(x + \frac{\hat{X} - X'}{X'})\right]$$

$$= \frac{1}{X'}\left[x - \frac{\hat{X} - X'}{X'}\right]$$

$$= \frac{1}{X'}\left[x - \frac{\hat{X} - X'}{X'}\right]$$

$$\therefore B(\hat{R}) = \frac{1}{X'}E[\hat{Y} - R\hat{X}](x - \frac{\hat{X} - X'}{X'})$$

$$= \frac{1}{X'}\left[\{E(\hat{Y}) - Y\right] - R\{E(\hat{X}) - X\}\right]$$

$$\begin{split} &-\frac{1}{\widetilde{X'^2}}\left[\operatorname{Cov}\left(\widehat{X},\widehat{Y}\right) - RV\left(\widehat{X}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\widetilde{Y_2}}\left[B(\widehat{Y}) - RB(\widehat{X})\right] + \frac{1}{\widetilde{Y'^2}}\left[RV(\widehat{X}) - \operatorname{Cov}(\widehat{X},\widehat{Y})\right] \quad \text{(30 1)} \end{split}$$

जहा $B(\widehat{Y}), B(\widehat{X})$ हे हमारा तालवँ कमर्स \widehat{Y} और \widehat{X} की अभिनतियों

(blases) से और $Cov(\widehat{X},\widehat{Y})$ ने हमारा तार्त्य \widehat{X} और \widehat{Y} से सहस्रसरण से है। यदि \widehat{Y} और \widehat{X} कमश्र Y और X से अनश्रित प्रावश्य हो तो $B(\widehat{Y}) = B(\widehat{X})$ $\Longrightarrow 0$ और X := X + X = X

$$B(\hat{R}) = \frac{1}{\hat{Y}_2} [RV(\hat{X}) - Cov(\hat{X}, \hat{Y})] \qquad (30 2)$$

धदि प्रतिचयन विधि सररु याद्चिकः हो तो

$$\begin{split} V(\hat{X}) &= \frac{N(N-n)}{n} \quad \stackrel{\stackrel{\tilde{F}}{F}}{\underset{i=1}{N}} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{N-1} \\ &\text{Cov}(\hat{X}, \hat{Y}) &= \frac{N(N-n)}{n} \quad \stackrel{\stackrel{\tilde{F}}{F}}{\underset{i=1}{N}} \frac{(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{N-1} \end{split}$$

$$\overline{\text{def}} \quad V(\widehat{Y}) = \frac{N(N-n)}{n} \quad \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} (Y_i - \overline{Y})^2}{N-1}$$

इसलिए $(\hat{R}) = \sum_{t=1}^{n} y_t$, और बड़े प्रतिवर्शों के लिए $B(\hat{R})$ का निम्नलिखित $\sum_{t=1}^{n} x_t$

स्रिकटन लिया जा सकता है।

$$\begin{split} B(\widehat{R}) &= \frac{1}{X^2} \frac{N(N-n)}{n(N-1)} \left[R \left\{ \sum_{i=1}^{N} X_i^n - N \widetilde{X}^2 \right\} \right. \\ &\left. - \left\{ \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - N \widetilde{X}^2 Y \right\} \right] \\ &= \frac{1}{X^2} \frac{N(N-n)}{n(N-1)} \sum_{i=1}^{N} X_i (R X_i - Y_i) . \quad (30 3) \end{split}$$

६ ३०.३ अभिनति का प्राक्कलन :

$$\widehat{B}(\widehat{R}) = \frac{1}{\widehat{X}^2} \frac{N(N-n)}{n(n-1)} \sum_{t=1}^{n} x_t (\widehat{R} x_t - y_t) \qquad \dots \quad (30 \text{ 4})$$

६ ३०.४ अनुपाती प्रान्कलन की माध्य-वर्ग-त्रुटि

यदि प्रतिदर्श परिमाण इतना वडा हो कि \hat{X} और X' में दिशेप अंतर न ही $\hat{\mathbf{n}}$ ी

 \hat{R} की माध्य-बर्ग-बृटि (M S.E) होगी $M S E (\hat{R}) = E(\hat{R} - R)^{2}$

$$= E \frac{1}{\hat{X}^2} (\hat{Y} - R\hat{X})^2$$

$$= \frac{1}{\hat{X}'^2} E (\hat{Y} - R\hat{X})^3$$

$$= \frac{1}{\hat{X}'^2} E [(\hat{Y} - Y) - R(\hat{X} - X)]^3$$

$$= \frac{1}{\hat{X}'^2} [MS E (\hat{Y}) - 2RM P E (\hat{X}, \hat{Y})$$

$$+ R^3 M S E (\hat{X})$$
...(30.5)

जहां $MPE(\hat{X}, \hat{Y}) = E(\hat{X} - X)(\hat{Y} - Y)$

यदि प्रचयन सरक याद्ष्टिक हो तो $MSE(\hat{R}) = \frac{1}{X^2} \frac{N(N-n)}{n(N-1)} \stackrel{N}{\Sigma} (Y_i - RX_i)^2 ... (30.6)$

 X^* n(N-1) $_{l=1}$ जपर विये $MSE(\hat{R})$ के समिकटन का प्राक्वलन नीचे दिए हुये सूत्र हारा

किया जा सकता है।
$$\widehat{MSE}. (\widehat{R})] = \frac{1}{\widehat{\sqrt{2}}} \frac{N(N-n)}{n(N-1)} \sum_{l=n}^{n} (Y_l - \widehat{R}X_l^2)^2 \dots (30.7)$$

६ ३०.५ समध्य-योग का अनुपाती-प्रावकलन

बहुआ समिष्ट की प्रत्येक इकाई के लिए किसी गुण x का मान जात होता है। यदि एक प्रतिवर्श के आधार पर $R = \frac{Y}{X}$ का अनुभावी प्राक्तलन विषय जाय तो इस प्राव्हलन को X से गुणा करने पर लगें एक प्राप्कलन Y का प्राप्त होता है जो \hat{Y} से भित है। इस प्रकार के प्राप्त प्राप्त करने पर लगें एक प्राप्कलन प्रे का प्राप्त होता है जो \hat{Y}

५३०६ अनुपाती-प्राक्कलन और साधारण अनभिनत प्राक्कलन को तलना →

$$\begin{split} &V(\hat{Y}) - M S E(\hat{Y}_{rel}) \\ &= V(\hat{Y}) - [V(\hat{Y}) - 2R \text{Cov}(\hat{X}, \hat{Y}) + R^2 V(\hat{X})] \\ &= Y^2 \left[\frac{2 \text{Cov}(\hat{X}, \hat{Y})}{XY} - \frac{V(\hat{X})}{X^2} \right] \\ & : \hat{Y}_{reh} \hat{Y} \text{ is alive seth } \hat{\xi} \text{ eff} \\ & : \frac{\text{Cov}(\hat{X}, \hat{Y})}{XY} > \frac{1}{2} \frac{V(\hat{X})}{X^2} \\ & : \text{ eff} \text{ Cov}(\hat{X}, \hat{Y}) = \rho_{eij}^2 \sigma_e^2 \sigma_e^2 \\ & : \text{ eff} \text{ Cov}(\hat{X}, \hat{Y}) = \rho_{eij}^2 \sigma_e^2 \sigma_e^2 \\ & : \text{ eff} \text{ Cov}(\hat{X}, \hat{Y}) = \rho_{eij}^2 \sigma_e^2 \sigma_e^2 \\ & : \text{ eff} \text{ } \hat{Y}_{reh} \hat{Y} \text{ is sent } \text{ effini } \text{ eff} \\ & : \rho_{eij}^2 \frac{\sigma_e^2}{X} \frac{\sigma_f^2}{Y} > \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_e}{2} |X| \right) \\ & : \text{ separal } \rho_{eij}^2 > \frac{1}{2} \frac{\left(\sigma_e |X|}{\left(\sigma_f |Y|\right)} = \frac{1}{2} \frac{C V(\hat{X})}{C V(\hat{Y})} \end{split}$$

यहाँ $CV(\hat{X})$ तथा $CV(\hat{Y})$ से हमारा तात्वर्ष कगर्थ \hat{X} और \hat{Y} के विचरण-गुणाको (coefficients of variation) से है।

 $CV.(X) = \frac{\sigma_{\hat{X}}}{V}$ तवा $CV.(\hat{Y}) = \frac{\sigma_{\hat{Y}}}{V}$

महुमा जिस मकार की स्थिन में बनुपात का उपयोग किया जाता है उसमें आशा की जाती है कि CV (\hat{X}) और CV (\hat{Y}) मार्थ दराबर होये । बसिलए पिर ρ_{4} ; का मान् $\frac{1}{2}$ से व्यविक हो तो हम \hat{Y} हक्ष उपयोग को अपिन उपयुक्त समस्रेगे । दस्तेल जातीरिकत यदि मत्येक दकाई के लिए $\hat{Y}_{re}=X$, तो $\hat{Y}_{re}=Y$ और \hat{Y}_{re} अत्तिनिकत तथा यथाओं होता है। परतु सामारण्वतम ऐसी स्थिति नही पायो जाती। यदि Y_{re} और X_r के अनुपात में विवेध विकान न हो तो जावा की ना तस्ति है कि \hat{Y}_{re} की जुट बहुत कम होगी। इसलिए इस प्रकार की स्थिति में \hat{Y} के स्थान पर \hat{Y}_{re} का उपयोग जिया जिया है। गा

९ ३०७ उदाहरण :—

1951 में जिला हमीरपुर की कुछ जनसच्या 590,731 थी। 1958 में जन सरया का प्राक्कलन करने के लिए जिले के 911 बावा में से 20 का सरल यादृष्टिक प्रतिचयन विया गया। इस प्रतिबद्धों के लिए

$$\begin{array}{c} 20 \\ \Sigma \gamma_{i} = 27,443 \\ \Sigma \gamma_{i} = 96,304,953 \\ \Sigma z_{i} = 24,698 \\ \Sigma z_{i} = 24,698 \\ \Sigma z_{i} = 25,289,177 \\ \vdots \\ \Sigma z_{i} = 100 \\ \Sigma z_{i} = 111114 \\ \Sigma z_{i} = 111114 \\ \Sigma z_{i} = 111114 \\ \Sigma z_{i} = 111114 \\ \Sigma z_{i} = 1121114 \\ \Sigma z_{i} = 1121114 \\ \Sigma z_{i} = 1121114 \\ \Sigma z_{i} = 112114 \\ \Sigma z_{i} = 11114 $

क्योंकि $V(\widehat{Y})$ का मान $MS.E\left(\widehat{Y}_{ret}
ight)$ से लगभग 20 युना है इसलिए यह स्पष्ट है कि अनुपानी प्राक्कलन \widehat{Y}_{ret} साधारण प्राक्कलन \widehat{Y} से उत्तम है।

§ ३०८ प्रतिदर्श-परिमाण यह च्यान देने योग्य बात है कि जगर बिये हुए अभिनति और प्रसरण के मूत्र केवल सिन्धान है जो प्रतिदन परिमाण के यथेब्ट रूप से वहें होने पर ही उपयुक्त समझे जा सकते हैं । नितने बडे प्रतिवर्ध को यथेन्ट रूप से बडा पानना चाहिए यह ठीक से नहीं कहा जा सकता । विभिन्न समिन्यों के लिए विभिन्न सम्याए यथेन्ट हैं । यह इस पर निर्मेर करता है कि X_i और Y_i का बनुषात बहुं तक बनर है । साधारणतमा यदि प्रतिवर्ध परिचाण 30 से अधिक हो और बतता हो कि $CV(\widehat{X})$ तथा $CV(\widehat{Y})$ बोनों ही १० प्रविस्तत से कप हों तो दसको काणी बड़ा तसमा सा सकता है । सारणी संख्या 30.1

1951 और 1958 में जिला हमीरवर के कछ माबो की जनसहया

1951 बार 1950 से जिला हमारपुर के कुछ वाबा का जनसरया					
पाम संख्या	1951 की	1958 की	अनुपात		
	जन सच्या	जन संख्या			
i	¹X	Yı	Y_t/X_t		
(1)	(2)	(3)	(4)		
I	1,865	1,905			
2	368	399			
3	817	1,025			
4	1,627	2,003			
	б51	726	Ĺ		
(6)	270	238	0 8667		
7	1,644	1,712	\		
8	564	590	Í		
9	488	480			
(10)	6,942	8,042	1 1585		
TI	792	980			
12	2,121	2,222	l		
13	222	290			
14	736	872			
(15)	563	614	1 0906		
16	165	177			
(17)	1,001	1,201	1 1008		
18	3,026	3,117			
19	469	521			
20	277	329			
कुल	24,698	27,443	<u></u>		

अध्याय ३१

विभिन्न-प्राधिकता प्रचयन (Selection with Varying Probabilities)

६ ३११ चयन विधि

अभी तक हमने जितनो भी प्रतिचयन विविधो का अध्ययन किया है थे एक या अधिक स्तरों में, एक या अधिक चरणों में, इकाइयों अपवा समूहों का सरल यादू-च्छिक प्रतिचयन ही थी। । परतु हम अन्य प्रकार से इकाइयों को चुनने की भी क्रव्यना कर संकते हैं जिसमें यधीप चयन की प्रायिकता का प्रत्येक प्रतिवस के लिए परिकलन किया जा सकता हो। परतु ये प्रायिकताएँ तब प्रतिवसों के लिए बराबर न हो। इस प्रकार की प्रतिचयन विधि की विधिन्न प्रायिकता चयन (selection with varying probabites) महते हैं।

मान लीजिए कि जुल इकाइयों की सरवा N है। इनको हम U_1 , U_2 , ι U_3 , U_4 से सूचित करेंगे । हम पहिले से निश्चित कर सकते हैं कि इन इकाइयों के प्रतिचयन की प्रायिकता कमा P_2 , P_3 , P_4 , P_4 , P_5 , P_6 होगी। इसमें हमें हमें इकाइयों के दुवारा चुने जाने वर प्रतिचय लगाने की लोई आवश्यकता नहीं है। मान लीजिए P_4 एक ऐसी पूर्ण संस्थाओं में परिणत हो जाती है। यदि P और इन प्रायिकताओं के गुणन फल को कमाय P_4 , P_5 , P_7 , P_8 से सुचित किया जाय तो निम्मलिखित ज्ञयन विधि से हम इंग्डिंग प्रायिकताओं को प्राप्त कर सकते हैं। P_8 हम एकि एकि एकि एकि एकि एकि एकि प्रतिचारिं परिचेत संस्थाई (ranoual numbers) हो।

हम P_1 , P_2 ,....., P_N को कम से एक स्तम में छिसकर इनके सचयी योगी (cumulative totals) को दूसरे स्तभ में छिख सकते हैं अँसा नीचे की सारणी में दिया हुआ है।

सारणी संख्या 31 1

कम संख्या i	PX प्राधिकता ≠Pi	सचयो योग i E Pj:≈Si j=1
(1)	(2)	(3)
1	P_1	$P_1 = S_1$
2	P_2	$P_1 + P_2 = S_2$
3	P_{3}	$P_1 + P_2 + P_3 = S_3$
	₽ı	i E Pj≈Si J=1
N	P_N	$ \begin{array}{c} N \\ \Sigma P = P_I = S_K \\ j = 1 \end{array} $

यदि कोई एक सक्या \mathbf{I} से P तक को सक्याओं में से समान आपिवता से चुनी जाप तो उसके S_{-2} और S_1 के बीच में होने की बया प्राधिकता है 2 क्योंकि S_{-2} और S_1 के बीच कुछ समय सक्यापें P, है। इसिकए स्वय्टतवा यह प्राधिकता P_1 $\Longrightarrow P$, है।

यही वह प्राप्तिकता है जो हम U_I के चयन के लिए कारते थे। इसलिए हमारी क्यन विधि निस्नलिखित ही सकती है।

1 से P एक की सक्याओं में से एक को बमान प्राधिकता से चुन किया जाप 1 यह सक्या सारणी में दिये हुए सक्यी योगों में हैं किन्ही वो $\{S_{c1}$ और $S_{\ell}\}$ के यीच में पहेंगी।

इनमें से वह जिससे कम हो अथवा जिसके सरावर हो (गर्थात् S_I) उससे सब-पित इकाई (U_i) को चुना हुआ माना जायगा।

८ ३१.२ विकल्प विधि

 $=\frac{P_r}{D}=p_r$

यदि कुल इकाइयो को सख्या बहुत अधिक हो तो उमर दिए हुए तरीके से सचयी योगों को प्रान्त करने में बहुत समय और मेहनत लगेगों । इस दत्ता में एक और विधि है जिसके द्वारा इस्टित प्राधिन ताएँ प्राप्त की जा सकती हैं। इस विधि के निम्नलिखित करण है।

(1) 1 से Nितक की सख्याओं में से किसी एक का समान प्राधिकता से प्रतिचयन

किया जाता है। चुनी हुई सख्या की हम । से सूचित करेंगे।

(2) मान क्षीजिए P' एक ऐसी सख्या है जो किसी भी P_i से रूम नहीं है। एक दूसरी सख्या I से P' तक की सख्याओं में से समान प्रापिकता से चुनी जाती है। इस चुनी हुई सख्या को r' से सूचित किया जायया।

(3) यदि r' ≤ P_r हो तो हम r वी इकाई Ur को चुन लेते हैं, अन्यया फिर प्रथम और द्वितीय चरणो को बुहराते हैं जब तक कि हमें इच्छित परिमाण का प्रतिदर्श प्राप्त मही हो जाता।

इस विभिद्वारा प्रथम बार में r वी इकाई को चुने आने की प्रायिकता $\frac{1}{N} \frac{P_r}{P'}$ है। इस घटना की प्रायिकता कि कोई भी इकाई नहीं चुनी जायगी $\left(z - \frac{P}{NP'}\right)$ है। क्योंकि U_r पहिले, दुसरे, टीसरे इस्यादि प्रयत्नों में चनी का सकती है इस्तिल्प

इसके चूने जाने की कुछ प्राधिकता
$$P(Ur) = \frac{1}{N} \frac{P_r}{P'} + \left(1 - \frac{P}{NP'}\right) \frac{1}{N} \frac{P_r}{P'} + \left(1 - \frac{P}{NP'}\right)^2 \frac{1}{N} \frac{P_r}{P'} + \dots + \left(1 - \frac{P}{NP'}\right)^2 \times \frac{1}{N} \frac{P_r}{P'} + \dots + \frac{1}{N} \frac{P_r}{P'} \frac{co}{2} \left(1 - \frac{P}{NP'}\right)^2 = \frac{1}{N} \frac{P_r}{P'} \frac{co}{1 - \left(1 - \frac{P}{NP'}\right)^2} = \frac{1}{N} \frac{P_r}{P'} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{P}{NP'}\right)}$$

§ ३१.३ प्राक्कलन

यदि चुनी हुई इकाई U_i हो वो $\frac{\gamma_I}{p_s}$ कुछ समस्टि के γ -गुण के योग का एक अनिभन्त प्राक्तक है।

$$E\left(\frac{Y_{1}}{p_{1}}\right) = \sum_{r=1}^{N} \frac{Y_{r}}{p_{r}} p_{r} = \sum_{r=1}^{N} Y_{r} = Y \dots \dots \dots \dots (31.1)$$

यदि कुल n इसाइया चुनी जायँ तो हमे प्रत्येक इकाई से इस प्रकार का एक जन-मिनत प्राक्कलन प्राप्त हो सकता है। इसिक्स इन प्राक्कलको का साध्य \hat{Y} भी समस्दि सौत \hat{Y} का एक अनुभिनत प्राक्कलक है।

$$\hat{Y} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{Y_l}{p_l} \qquad \dots (31.2)$$

§ ३१.४ प्राक्कलक का प्रसरण

$$V(\widehat{Y}) = \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^{n} V\left(\frac{Y_t}{P_t}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^{n} \sum_{r=1}^{N} \left(\frac{Y_r}{P_r} - Y\right)^n p_r$$

$$= \frac{1}{n} \left[\sum_{t=1}^{N} \frac{Y_t^2}{P_r} - Y^2\right] \qquad (313)$$

$$\text{wit} \quad p_t = k y_t \qquad i=1, 2 \dots N$$

$$\text{wit} \quad 1 - \sum_{t=1}^{N} p_t = k \sum_{t=1}^{N} Y_t = k Y$$

$$\therefore \quad k = \frac{x}{Y}$$

इस दशा में

$$V(\widehat{Y}) = \frac{1}{n} \left[\sum_{r=1}^{N} \frac{Y_r^2}{Y_r/Y} - Y^2 \right] = 0$$

६ ३१५ मापानुपाती प्रायिकता

s:ze) कहा जाता है। यदि इस प्राक्टलन को Y_{pgs} से सूचित क्या जाय तो

$$\hat{Y}_{ppi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{p_i}$$

$$=\frac{X}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_{i}}{X_{i}}\tag{31.4}$$

$$\operatorname{var} X = \sum_{i=2}^{N} X_{i} \tag{31.5}$$

🖇 ३१-६ प्रावकलक के प्रसरण का प्रावकलन

हम जानते हैं कि यदि एक समस्टि वा प्रसव्य o* हो और उसमें से n परिमाण का एक प्रतिदस समान प्रायिकता द्वारा चुना जाय (जिसमें इवाइया वे टुवारा चुने जाने पर कोई रोख न हो)तो σ^2 का एक अनमिनत प्राक्कलक $s^2 = \frac{\overline{z}}{n-1} \frac{(y,-\overline{y})^2}{n-1}$

है वहा 1-वी चुनी हुई इकाई का मान y, है। यदि हम $\frac{y}{p_s}$ की समिट के प्रसरण का प्राक्कलन करना चाहें तो प्राक्कल निस्मालियत होगा।

$$\hat{V}\left(\frac{Y_l}{p_l}\right) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i}{p_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{p_i}\right)^2 \tag{31.6}$$

परतु हमारे प्राक्कलक का प्रसरण $\frac{Y_i}{p_i}$ के प्रसरण का n वा भाग है इसलिए उसका अनिभनत प्राक्कलक निम्नलिखित है

$$\widehat{V}\left(\widehat{Y}\right) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_{i}}{p_{i}} - \widehat{Y}\right)^{n} \tag{31.7}$$

इकाइयो के माप X के रूप में प्रावकलक निम्मलिखित होगा

$$\hat{V}(\hat{Y}_{PF}) = \frac{X^{n}}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_{i}}{X_{i}} \right)^{2} - \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_{i}}{X_{i}} \right) \right\}^{n} \right] \quad (31.8)$$

[§] ३१७ खदाहरण

सारणी 301 में एक छोटी-शी समीट के किए उसके माप X और गुण Y के मान दिने हुए हैं। उदाहरण हारा समसामा जायमा कि इस माप के अनुपात में प्राधिकवा केकर इकाइयों को किला प्रकार जुना जा बकता है। एक जुने हुए प्रतिदयों से Y के समीट-योग प्राप्तकल किया जायगा और प्राप्तकलक के प्रसरण का प्रावकलन भी किया जायना।

हुमें समस्टि में से पांच इकाइयां चुनती है। सारवी सस्या 31 2 के स्तम (3) से हुमें पता चळता है कि $X = \sum_{p=1}^{20} X_p = 24,698$ । अब हुम पांच सस्याएँ 1 और 24,698 के बीच में से चुनते हैं जो स्तम (4) में बी हुई है। ये सरपाएँ उन्हीं इकाइयो के सामने छिल्दी गयी है जो इनके द्वारा पुनी हुई है। ये सारपाएँ उन्हीं इकाइयो के सामने छिल्दी गयी है जो इनके द्वारा पुनी हुई है। उसाहरण के लिए 5,413 पांचन

सारणी संख्या 31.2

कम स€या	इकाई का माप	सचवी योग	यादृ(च्छक
	X,	$S = \sum_{i=1}^{l} X_i$	सस्या
		$S_I = \sum_{j=1}^{N} X_j$	
(1)	(2)	(3)	(4)
ĭ	1,865	1,865	
2	368	2,233	
3	817	3,050	
4	1,627	4,677	
5	651	5,328	
б	270	5,598	5,413
_ 7	1,644	7,242	
8	564	7,806	
9	488	8,294	
10	6,942	15,236	10,541;
II	792	16,028	
12	2,121	18,149	
13	222	18,371	
14	736	19,107	
15	563	19,670	19,651
16	165	19,835	
17	1,091	20,926	20,734
18	3,026	23,952	
19	469	24,421	
20	277	24,698	

और छटे सचयी योगों के बीच की सख्या है इसिटए इसके द्वारा छठी इकाई को चुना जायना। इस प्रतिदर्श में छठी, दसबी, पन्त्रहवी और सजहवी इकाई चुनी गयी है। दसवी इकाई दुवारा चुनी गयी है। सारणी सख्या 301 में इन चुनी हुई इकाइयों के लिए Y, और X, का अनुपात स्तम (4) में दिया हुआ है।

$$\hat{Y}_{pps} = \frac{24,698}{5} [0.8667 + 1.1585 + 1.1585 + 1.0906 + 1.1008]$$

$$= 24,698 \times 1.0750$$

==27,550

सारणी संस्या 30 1 से पता चकता है कि Y=27,443 । इस प्रकार \hat{Y}_{pro} एक बहुत ही अच्छा प्राचकरूप है। आप अन्य प्रतिदर्ग लेक्ट इसकी और \hat{Y}_{pro} की कुळग कर सकते हैं।

$$\hat{V}(Y_{pp}) = \frac{(24698)^{2}}{5 \times 4} [(0.8667)^{8} + 2 \times (1.1585)^{2} + (1.0906)^{8} + (1.1008)^{2} - \frac{1}{6} (5.3751)^{8}]$$

$$= \frac{(249698)^{12}}{5 \times 4} \times 0.05845739$$

=1,782,924

पारिभाषिक-शब्दावली

हिन्दी-अग्रेजी

सनिभनत-unbased भनभिनतता-unbrasedness अनभिनत प्राक्तलक-mbiased

Cstimator. अनुपानी प्राक्तरणन—tatto estimation

अनुनम-unfinite sequence सन्तर धर्णी-infinite series अपवर्गी-exclusive

अभिकल्पना-design

अभिवारणाएँ-postulates अधितत परीलक-hased test अभिनति-bias

अवकल कलन-differential calculus

असत्त्व-discrete वसत्त बदन-discrete distribution

असमाग-heterogenous असभाव्य-improbable वसमगिति-asymmetry नस्पीकृति प्रदेश-region of

tejection असिद्ध-disprove लागिक विधि-inductive method wierlieru-dealyanou नापेशिक बारबारसा-relative

frequency

आयवाकार वटन-rectangular

distribution

भासनन सौप्ठन-goodness of fit ष्टकाई~unit

सरक्षपण—toss उपचार-treatment

उपपत्ति-proof सपादान-Ectors क्छ-verncal

एक बातीय फलन-linear function

एक पातीय-linear एक पावर्शीय वटन-marginal

distribution एक-समान अधिकतम-uulormly

रामकाबान परीक्षण-powerful test एक समान अनभिनत परीधणuniformly unbiased test

एक्स्बनी-monotonic अतर्वत्यक-परास-unter-quartile range,

अतराल प्राक्कलन-mterval estimation अत्र समृह-between groups ser-numerator

थाकडे. न्यास-data आधिक समाकुलन-partial confounding व कृदता-kurtosis कारण और कार्य-cause and effect करतल कोप्टक-curled brackets कुलक−set केन्द्रीय प्रवृत्ति-central tendency wife-ordinate क्रमचय-permutation क्रमागत-consecutive कमिक-साहचय का सूचकाक-index of order association rag-factors गतिविज्ञान-dynamics गुण साहचर्य-association of attributes प्राह्म-admissible भात श्रणी-power series प्ण-moment घुण विधि-method of moments चिकित्सा विज्ञान-medical science टकन-type ati-lot त्र्य-equivalent सोरण-ogive घटियो का वटन-law of errors

त्वरण-acceleration

दक्षता-efficiency

दडचित्र-bar diagram

दक्ष प्रावकलक्-efficient estimator estus-decile दाशनिक-तस्य विद्या-meta-physics द्वि घाती परवलय-parabola of second degree दिपद बटन-binomial distribution द्वि विभिन्नीय वादन्छिक चर-two dimentional random variable घनारमक-positive निक्प-criterion नियंत्रण इकाइयाँ-control units नियत्रण चाट-control chart नियत्रित यादच्छिकीकरण-restricted randomisation निरपेक्ष ग्रान-absolute value निरमन-elimination नि श्रपी-exhaustive स्यास-ते ata परत लब्ध प्रायिकता-a posteriori probability पर्याप्त प्रतिदशज-sufficient statistic पर्याप्ति—sufficiency परस्पर अपवर्जी घटनाए-mutually exclusive events परास-range परिकल्पना-hypothesis परिकल्पना की जाँच-testing of hypothesis परिधि-circumference

परिमित्त-finite

परिभेष संस्था-rational number परीक्षण सामर्थ्य-power of test गारस्परिक साहचयं-mutuमे association पूर्वेत गहीत माथिकता-३-१६१०६६ probability पोपण-संबंधी गवेपणा-nutritional research पौरिटकता-food value पक्ति-१०१४ प्रक्षेप-projection प्रकीर्ण चित-scatter diagram प्रतिचयन अंतराल-sampling interval प्ररिक्छेब-mecreection मतिदर्श-sample nfrasion-statistic प्रतिदर्शेत्र वटन-sampling distrihutton प्रतिदर्श निरीक्षण योजना-sampling inspection plan प्रतिदर्शी प्रटि-sampling error Victoria Permitten प्रतिवर्धी प्रायिकता-conditional probability प्रतिवधी बटन-conditional distrihutton vfavy_model प्रतिशतता बिद्-percentage points

प्रतिष्ठा-status

प्रतिअति-guarantee प्रथम बत्यक-first quartile ब्रमेब-theorem प्रयोग अभिकल्पना-design of experiment प्रयोजित गणित-applied mathematics प्रवृत्तियाँ-tendencies THEOLOGICAL PROPERTY OF THE PR प्रसरण विक्लेपण-analysis of vatiance VATHERU-normal प्रसार-dispersion प्राप्यालयः—cstimator प्राचल-parameters प्राथमिक घटनाएँ-elementary events प्राधिकता-probability प्राधिकता घनत्व-probability density त्रायिकता ब्रब्यमान-probability mass प्राधिकता वटन-probability distribution प्रायोगिक मूल-experimental error त्रारोहक समृह-overlapping clusters नेशक-observer ग्रेक्षणगण-observable

प्रेक्षण श्रृटि-observational error

ध्वासो क्टन-Poisson's distrihution बह उपादानीय प्रयोग-factorial experiment बहुचर-multivariate बहुलक (भूयिष्ठम)-mode बहुलक अतराल-modal interval कारबारता-दे० वारवारता बिंदु प्राक्कलन-point estimation बद्धि परीक्षा-intelligence test fira-fraction भूज-abscissa भुजाध-axis of abscissa मन शारीरिक-psychosomatic महत्तम सभाविता विधि-maximum likelihood method HIAM-unit माञ्च-mean माध्य वर्ग आसग-mean square contingency माध्य वर्ग विचलन मूल-root mean square deviation माध्य विचलन-mean-deviation माध्यातरिक घुणं-moment about the mean

माध्यिका-medium

ተነዋየስ

scale

मानक विचलन-standard devia-

मानकित मापनी → standardized

मापनी-scale मापानपाती प्राधिकता-probability proportional to size मुल बिंद्-०राष्ट्राध मौसम विज्ञान विभाग- meteorological station ययार्थता-precision ययार्थ नियम-exact laws यादच्छिक आरम्भ-tandom start याद्धिक चर-random variable यादच्छिक प्रयोग-random experiments यादिक्छिकीकरण-randomization युगपत् समीकरण - simultaneous equations युग्म-pair रूप-shape लघ् वणक-logarithm लेखाचित्र-graph वक आसजन-curve fitting वग-square वर्गमुल-square root वर्गित विचलन-squared deviations वनस्पति प्रजनन-plant breeding चारवारता-धिक्यवसारप वारवारता बहुभुज - frequency polygon

मानकित असामान्य बटन-standardi-

zed normal distribution

माप-measure

विकल्प-alternative विचलन-deviation विभिन्न प्राधिकता चयन – selection with varying probabilities विन्यास-arrangement

विनिदिष्ट-specify विश्वास गुणान:-confidence coeffi-

cient विश्वास अतराल-confidence in-

terval विश्वास्य युनित—fiducial argument

विश्वास्य षटन-fiducial distribution विषम-odd

वेग-velocity वैषम्य-skewness.

व्यय-skewness, वृध्दि सापक-rain giage

व्यवस्थित प्रतिचयन ~ systematic sampling

ब्यास-dumeter वाततमक-percentile चित्रपता-peakedness

श्रृत्यान्तरिक पूष-raw moment

सकेत-notation संस्थातमक अभिगणना-amthmetical

computations सगत-consistent

सगम–union

संघटक-component

सचय-combinations सचयो-cumulative सचयी प्रायिकना फलन—distribution function

शतुलित असपूर्ण ब्लाक अभिकल्पनाbalanced incomplete block design

सपरीक्षण (या प्रयोग विधि)-cx-

perimentation सभावी-likely

सयुनत घटनाएँ-jount events सयुन्त बटन-jount distribution

सयुक्त बटन=juin सयोज्य-additive

> समोज्यसा गुण-additive property समय अवराल-critical region

सत्तत-continuous

सत्तत वटन-continuous distribu-

सत्य भासक-plausible

सन्निकटन–approximation सम–even

सम्मित-symmetrical समिदि-population (universe)

समस्टि-population (universe रामावलन-integration

समाकल-integral

समान्तर माध्य-arithmetic mean

समानुपाती–proportionsi रामाश्रयण-regression

समाश्रयण गुणाक-regression co-

efficient

ममाययण रेखा-regression line समाययण वक-regression curve

मास्त्रिको के सिद्धान्त और उपयोग 880

समागता परीक्षण-test of homogeneity समृहाम्यसरिक-within group

समजन-adjustment

समजित उपचार योग - adjusted treatment total

सर्वेक्षण—survey

सहकारी घर-concomitant variable

सहज ज्ञान-intuition

सह प्रसरण विश्लेषण-analysis of

convariance सह-सबध-correlation

सह-सबध गुणाक-correlation coefficient

सहसबधानुपात-correlation ratio सास्यिक-statistician मास्यिकी-statistics

साब्यिकीय नियम-statistical laws

सार्थकता स्तर-level of significance

स्वेच्छ-arbitrary हर-denominator

lmg

tion

सारणी-table

साहचर्य-association

सुपाही-sensitive स्तर_level

earn-column

dom स्वीकृति क्षेत्र-acceptance region

सामर्थ्य वक-power curve सामध्यंबान्-powerful

सामहिक प्रतिचयन-cluster samp-

स्थानीयत अधिकतम सामध्यंवान्-locally most powerful स्वातत्रय सल्या-degrees of free-

स्यानाक-coordinate स्थानीयत अभिनत-locally biased

साहचर्य सूचक-index of associa-

अग्रेजी-हिन्दी

abscissa—মুস association-साह वर्ष absolute value-निरपेश मान association of attributes-गुणacceleration—स्वरण साहचर्य acceptance region-स्वीकृति क्षेत्र asymmetry-असममिति additive-संयोज्य axis of abscissa-भजाक्ष additive property-सयोज्यता गुण balanced incomplete block design-मनुक्ति असपूर्ण ब्लाक adjusted treatment total-un-जित उपचार योग अभिकल्पना adjustment-समजन bar dragram-दण्डचित्र between groups sum of square admissible-प्राह्म alternative-विकल्प अतर समृह वग-योग analysis of covariance-सङ मसhias—มโทสโก biased test-अभिनात परीक्षण रण विश्लेपण binomial distribution-दिपद बटन analysis of variance-प्रसरण cause and effect-कार्य और कारण विक्लेयण a-posteriori probability-परत central tendency-केन्द्रीय प्रवृत्ति circumference-परिषि लक्ष्य प्राधिकता cluster sampling-सागृहिक भतिapplied mathematics-प्रयोगित शणित चयन approximation-सनिकटन column-स्तम a-priori probability-पूर्वत combination-सब्दय गृहीत प्राधिकवा component-सघरक concountant variable-सहकारी वर arbitrary-स्वेच्छ conditional distribution-प्रतिवधीarithmetical computations-सस्यात्मक अभिगणना वटन aruthmencal mean-समावर माध्य conditional probability-प्रतिarrangement-विन्यास बधी प्राधिकती

confidence coefficient—विश्वास गुणाक

confidence interval-विश्वास्य

अतराल

consecutive-कमागत

consistency—संगति consistent—संगत

consistent-H4d

continuous—भतत्त्व continuous distribution—सत्त्व

बटन control chart-नियत्रण चार्ट

control units-नियत्रण इकाइसाँ coordinate-स्थानाक

correlation coefficient सहस्रवय

गुणाक correlation ratio-सहसवधानुपात

criterion-निकप

critical region-सराय अंतरास

cumulative-समयी curled brackets-कुन्तल कोप्ठक

curve fitting-वक आसजन data-अकिडे, त्यास

data-जाकड, त्यास decile-दशमक degrees of freedom-स्वातक्य

संस्या denominator—हर

design of experiment-प्रयोग

अभिकल्पना deviation=विचलन dıameter-ज्यास

differential calculus-अवक्ल कलन

discrete-असवत

discrete distribution-असतत वटन dispersion-प्रसार

disprove-असिद

distribution function-सन्वयी

प्रायिकता फलन dvnamics—गति विज्ञान

efficient estimator-दक्ष प्राविकल्क

efficiency-दक्षता

elementary events-प्राथमिक घटनाएँ

elimination—निरसन equivalent—तृत्य

edmator-alea

even—सम

exact laws-यथार्थ नियम

exclusive-अपवर्जी exhaustive-ति नेपी

experimental error—प्रायोगिक नुदि experimentation—सपरीक्षण, प्रयोग

विधि

factorial experiment=बहु-उपा-दानीय प्रयोग

दानीय प्रमाप factor—उपादान, खण्ड

fiducial argument-विश्वास्य युक्ति fiducial distribution-विश्वास्य वटन

finite-परिमित

first kind of error-पहली किस्म

की त्रुटि

first quartile-प्रथम चतुर्यक food value-पौष्टिकता fraction-फिल

frequency-बारबारता

frequency polygon-बारवारता बहुमुज

goodness of fit-आगजन सौफ्टव graph-लेखा चित्र

guarantee-अतिथृति heterogenous-असमाग hypothesis-परिकल्पना

idealisation—आवर्शीकरण improbable—असमान्य

undex of association—साहबर्य सूचक undex of order association—कमिक

साहचर्य का सूचकाक mductive method-आगमिक विधि mbinite sequence-अनत अनुकम

mhnite sequence-अनत अनुकम mfinite series-अनत अणी integral-समाकल integral-समाकलन

mtegran—समाकलक mtelligence test—इहि परीक्षण mtel-quartile range—अतश्वतुर्वेक परास

intersection-प्रतिन्छर interval estimation-अंतराल प्राक्कलन

intuition-सहज ज्ञान

joint distribution-वेयुक्त कटन

joint events-संयुक्त घटनाएँ kurtosis-ककुदंता law of errors-वृष्टियों का बटन

level-स्तर

level of significance-सार्यकता स्तर

lıkcly—सभावी

Inear-एकवातीय

linear function—एक घातीय फलन locally biased—स्थानीयत अभिनत locally most powerful—स्यानीयत

विधिकतम सामध्यवान्

loganthm—लघुगणक lot=दरी

main effect-मुख्य प्रभाव marginal distribution-एक पारवींन

marg बटन

maximum likelihood method~ महत्तम संभाविता विधि

mean–माध्य mean deviation–माध्य विचलन mean square contingency–माध्य

वग आसग measure—माप median—माध्यका

medical science-चिकित्सा विज्ञान meta-physics-तत्त्वविद्या meteorological station-मीसम

विज्ञान विभाग method of moments—पूर्ण विभि

method of moments-पूर्व विशि modal interval-बहुलक असराल

peakedness-शिखरता mode-बहरूक model-stages percentage points-प्रतिशतता बिदु moment-ध्यं percentile-शततमक moment about the meanpermutation-क्रमचय माध्यातरिक घणं plant breeding-वनस्पति प्रजनन plausible-सस्य भासक monotonic-एकस्वनी multivariate-वहचर point estimation-बिंद प्राक्कलन Poisson's distribution-प्वासी वदन mutual association-पारस्परिक साहचर्य population (Universe)-समन्दि mutual exclusive events-परस्पर positive-बनात्मक अपवर्जी घटनाएँ postulate-अभिवारणा normal—ченией power-सामर्थ्य notation—सनेत power curve-सामर्थ्य वक powerful-सामर्थ्यवान numerator—अश nutrational research-पोपण-सबधी power of a test-परीक्षण-सामध्ये power series-घातश्रेणी रावेषणा observable-प्रेक्षण गुम्य, प्रेक्य precision-यथार्थता observational error-प्रेक्षण त्रटि probability-प्रायिकता observer-प्रेक्षक probability density-प्रापिकता odd--विश्वम घनत्व ogive-तोरण probability distribution-प्राप्तिकता ordinate-कोटि origin-मूल बिन्द् probability mass-प्रायिकता द्रव्यoverlapping clusters-प्रारीहक समह मान pair-युगम probability proportional to parabola of second degree-fasize-मापानुपाती प्रायिकता घाती परवलय projection-प्रक्षेप marameter-prass १४००ई-उपपत्ति

> proportional—समानुपाती psychosomatic—मन शारीरिक

partial confounding-आशिक

समाक्लन

rain guage-वृष्टि-मानक random experiment-वावृश्चिक प्रयोग

andomization—यादृष्टिकोकरण random start—यादृष्टिक भारम random variable—याद्ष्टिक चर range—परास rano-estimation—अनुपाती भारकल्ल rational number—परिभेद संख्या raw moment—सुन्यातरिक पृष्टी real number—वार्त्यातरिक पृष्टी

real number-वास्तविक सस्या
rectangular distribution—
सायदाकार बटन
region of rejection—अस्वीकृति क्षेत
regression—समाव्यवण
regression coefficient—समाव्यवण

regression coefficient-समाध्यम् मुणाक regression curve-समाध्यम्म वक्र regression bine-समाध्यम्म रेला relative frequency-आपेक्षिक बारवारता

restricted randomization—
নিয়াসির যাবুভিন্তকীকংশ
restriction—সন্তিম্ম
root mean square deviation—
মাত্র বর্ণ-বিষক্তন মুস্ত
row-পশ্বি

row-पनित sample-प्रतिदर्श sampling distribution-प्रतिदर्शन

वटन

sampling crror-अतिवर्गी वृदि sampling inspection plan-अतिवर्श निरोक्षण योजना

िनरीक्षण योजना sampling interval—प्रतिचयन अंतराल scale—मापनी scatter diagram—प्रकीणं चित्र

second kind of error - दूसरी किस्म की तृटि selection with varying probabitings-विभिन्न प्राधिकता चयन

bilities-विभिन्न प्राधिकता चयन sensitive-मुपाही set-कुलक

set—कुलक shape- रूप

simultaneous equations-मुनपत् समीकरण

skcwn.ess-वैषम्य specify-विनिदिष्ट

square-वर्ग squared deviation-वर्गित विपलन square root-वगम्ल

standard devantion—मानक विचलन standardised normal distribution—मानकित प्रसामान्य बटन standardised scale—मानकित माननी

statistical laws-सास्थिकीय नियम statistics-सास्थिकी statis-अतिच्छा sufficiency-प्यमित

sufficient-पर्याप्त sufficient statistic-पर्याप्त प्रतिदर्शज symmetrical-समित systematic sampling-व्यवस्थित

survey-सर्वेक्षण

प रीक्षण

की जाँच

type-टकन

theorem-प्रमेख tosses—उरक्षेपण

treatment-उपचार

प्रतिचयन table-सारणी tendency-प्रवृत्ति

test of homogeneity-समापता

two dimensional random

testing of hypothesis-परिकल्पना

समान अनिभनत परीक्षण union—संगम

unit-मात्रक, इकाई

un biased-अन्धिनत

प्राक्तलक

unbiased estimator-अनिभनत

uniformly most powerful test एक

समान अधिकतम सामर्थ्यवान परीक्षण

uniformly unbiased test-एक-

unbrasedness-अन्भिन्तता

universe (population)-समन्दि

unknown-अज्ञात

velocity—वेग

within group-समुहाम्यातरिक

variable-द्वि-विमितीय गादि च्छक चर vertical-ऊर्ध्व

variance-प्रसरण